

## I- Exercice 1 (6 pts)

### Partie 1

$ABC$  est un triangle équilatéral tel que :  $\overline{(\vec{AB}; \vec{AC})} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ .

On construit à l'extérieur de ce triangle un parallélogramme  $BCDE$ .

On considère la rotation  $r$  de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

1. Construire le point  $F$  l'image du point  $E$  par la rotation  $r$ , puis montrer que  $CFD$  est un triangle équilatéral.
2. Montrer que :  $\overline{(\vec{BE}; \vec{BA})} \equiv \overline{(\vec{CF}; \vec{CA})} [2\pi]$
3. Que peut-on dire sur le point  $F$  si  $E$  appartient à  $(AB)$  ?

### Partie 2

Soit  $ABC$  un triangle et  $D$  un point tel que  $D = \text{bar} \{(B; 1), (C; 2)\}$ .

Soit  $r$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

1. Construire les points  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  les images respectives de  $B$ ,  $C$  et  $D$  par  $r$ .
2. Montrer que les points  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  sont alignés.

## II- Exercice 2 (5 pts)

### Partie 1

$ABC$  est un triangle rectangle isocèle en  $A$  tel que  $\overline{(\vec{AB}; \vec{AC})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

Soit  $I$  le milieu du segment  $[BC]$ .

$E$  et  $F$  sont deux points du plan tels que  $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AC}$  et  $\vec{BF} = \frac{2}{3}\vec{BA}$

On considère la rotation de centre  $I$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

1. Montrer que le triangle  $EIF$  est rectangle isocèle en  $I$

### Partie 2

$ABCD$  un carré tel que  $\overline{(\vec{AB}; \vec{AD})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

Soit  $E$  un point du segment  $[BC]$  tel que  $E$  est différent de  $B$  et  $C$ .

Soit  $r$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

1. Déterminer les images des deux droites  $(BC)$  et  $(AE)$
2. En déduire l'image du point  $E$  par la rotation  $r$ .

### III- Exercice 3 (6 pts)

#### Partie 1

On considère la fonction  $f$  définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} ; x < 1 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} ; x > 1 \end{cases}$$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ . Conclure.

On considère la fonction  $g$  définie par : 
$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 + 1}{-x + 3} ; x \leq 1 \\ g(x) = 1 - ax^2 ; x > 2 \end{cases}$$

2. Déterminer une valeur de  $a$  pour laquelle  $g$  admet une limite en 2.

#### Partie 2

1. Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1$

2. Calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \cos x}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2 - \cos x}$

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2$

3. Vérifier que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) |f(x) - 2| \leq |x|$ , puis déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

#### Partie 3

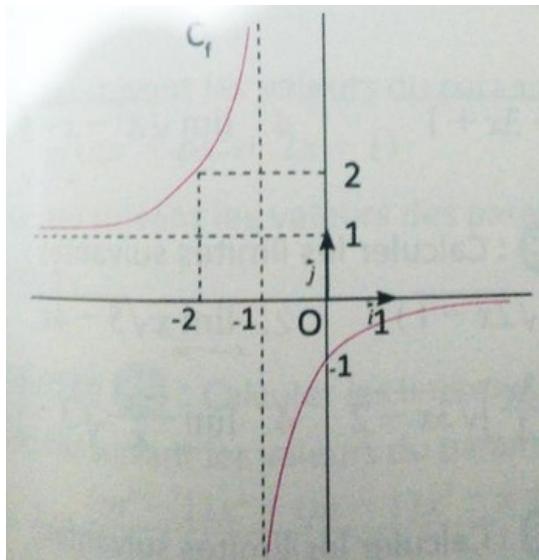
On considère la fonction  $g$  définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $g(x) = \frac{4 \sin(x) + 3x}{x - 1}$

1. Montrer que  $(\forall x \in ]1; +\infty[) |g(x) - 3| \leq \frac{7}{x - 1}$

2. En déduire la limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

### IV- Exercice 4 (3 pts)

La figure suivante représente la courbe de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$  :



1. Déterminer par lecture graphique les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) =$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} =$$