



Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 9 (La dérivation d'une fonction numérique)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

### Sommaire

#### I- La dérivabilité d'une fonction en un point

1-1/ Le nombre dérivé

1-2/ Interprétation géométrique du nombre dérivé – La tangente à la courbe en un point

1-3/ Approximation d'une fonction dérivable en un point par une fonction affine

#### II- Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche

2-1/ Définitions et propriétés

2-2/ Interprétation géométrique - Demi droite tangente en un point de la courbe

#### III- La fonction dérivé d'une fonction dérivable

3-1/ La fonction dérivé

3-2/ La fonction dérivée seconde - la fonction dérivée d'ordre n

3-3/ Fonction dérivée des fonctions usuelles

3-4/ Opérations sur les fonctions dérivables

#### IV- Applications de la dérivation

4-1/ Monotonie d'une fonction et signe de sa fonction dérivée

4-2/ Extremums d'une fonction dérivable

#### V- Équations différentielle $y'' + w^2y = 0$

#### VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

6-5/ Exercice 5

## 6-6/ Exercice 6

### I- La dérivabilité d'une fonction en un point

#### 1-1/ Le nombre dérivé

##### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$ .

On dit que la fonction  $f$  est dérivable en  $a$ , s'il existe un nombre réel  $l$  tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$$

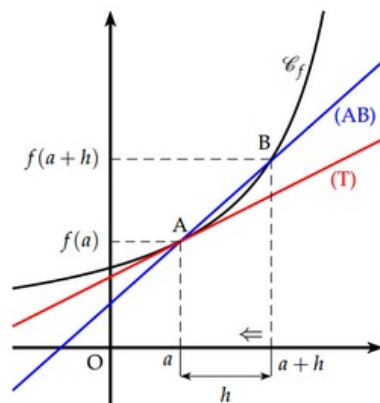
Le réel  $l$  est appelé le nombre dérivé de la fonction  $f$  en  $a$ , il est noté :  $f'(a)$

On écrit :  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$  ou  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

##### Exemple

Étudions la dérivabilité de la fonction  $f : x \mapsto 2x^2$  en  $a = 1$

#### 1-2/ Interprétation géométrique du nombre dérivé – La tangente à la courbe en un point



Le coefficient directeur  $\alpha$  de la droite (AB) est :

$$\alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si le point B se rapproche du point A ( $h$  tend vers 0), la droite (AB) se rapproche de la tangente (T) à la courbe en  $x = a$ . Le coefficient directeur de cette tangente (T) est appelé **nombre dérivé**. Ce nombre dérivé est noté  $f'(a)$ .

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

##### Définition

Soit  $f$  une fonction dérivable en un point  $a$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

La droite (T) qui passe par le point  $A(a, f(a))$  et qui est à pour coefficient directeur  $f'(a)$  est appelée la tangente à la courbe  $(C_f)$  au point A.

##### Propriété

Soit  $f$  une fonction dérivable en un point  $a$ .

Une équation de la droite tangente à la courbe  $(C_f)$  de la fonction  $f$  au point  $A(a, f(a))$  est :

$$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

##### Exemple

Déterminons une équation de la tangente ( $T$ ) à la courbe de la fonction  $x \mapsto f(x) = 2x^2$  au point  $A(1, f(1))$ .

## 1-3/ Approximation d'une fonction dérivable en un point par une fonction affine

### Définition

Soit  $f$  une fonction dérivable en un point  $a$ .

La fonction  $u : x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$  est appelée la fonction affine tangente à la fonction  $f$  au point  $a$ .

Le réel  $f'(a)(x - a) + f(a)$  est l'approximation affine du réel  $f(x)$  au voisinage de  $a$ , on écrit :

$$f(x) \sim_a f'(a)(x - a) + f(a)$$

## II- Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche

### 2-1/ Définitions et propriétés

#### Définition 1

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme :  $([a; a + r[ \mid r > 0)$

On dit que  $f$  est dérivable à droite en  $a$  s'il existe un réel  $l$  tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$$

Le réel  $l$  est appelé le nombre dérivé de la fonction  $f$  à droite en  $a$ , et on le note par :  $f'_d(a)$

$$\text{On écrit : } f'_d(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

#### Définition 2

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme :  $(]a - r; a] \mid r > 0)$

On dit que  $f$  est dérivable à gauche en  $a$  s'il existe un réel  $l$  tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$$

Le réel  $l$  est appelé le nombre dérivé de la fonction  $f$  à gauche en  $a$ , et on le note par :  $f'_g(a)$

$$\text{On écrit : } f'_g(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

### Propriété

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$ .

$f$  est dérivable en  $a$  si et seulement si  $f$  est dérivable à droite en  $a$  et  $f$  est dérivable à gauche en  $a$  et  $f'_d(a) = f'_g(a)$

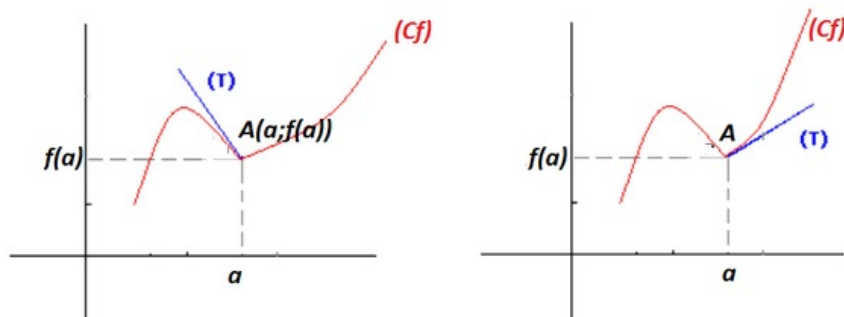
### 2-2/ Interprétation géométrique - Demi droite tangente en un point de la courbe

Si  $f$  est dérivable à droite en  $a$ , cela signifie graphiquement que la courbe de la fonction  $f$  admet une demi-tangente au point  $A(a; f(a))$  d'équation :

$$(T_d) : y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$$

Si  $f$  est dérivable à gauche en  $a$ , cela signifie graphiquement que la courbe de la fonction  $f$  admet une demi-tangente au point  $A(a; f(a))$  d'équation :

$$(T_g) : y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$$



$$\begin{cases} (T) : y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$$

$$\begin{cases} (T) : y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

## Résumé de La dérivabilité en un point - Interprétation géométrique du nombre dérivé

La limite	La dérivabilité	Interprétation géométrique
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	$f$ est dérivable en $a$ et on a : $f'(a) = l$	$(C_f)$ admet une tangente d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ au point $A(a; f(a))$ .
$\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$	$f$ n'est pas dérivable en $a$ .	$(C_f)$ admet une demi-tangente verticale d'équation $x = a$ au point $A(a; f(a))$ .
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	$f$ est dérivable à droite en $a$ et on a : $f'_d(a) = l$	$(C_f)$ admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$ et $x \geq a$ .
$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	$f$ est dérivable à gauche en $a$ et on a : $f'_g(a) = l$	$(C_f)$ admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$ et $x \leq a$ .

## III- La fonction dérivé d'une fonction dérivable

### 3-1/ La fonction dérivé

#### Définitions

On dit qu'une fonction  $f$  est dérivable sur un intervalle ouvert  $]a; b[$  si  $f$  est dérivable en tout point de  $]a; b[$ .

On dit qu'une fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle fermé  $[a; b]$  si  $f$  est dérivable sur  $]a; b[$  et  $f$  dérivable à droite en  $a$  et à gauche en  $b$ .

Si  $f$  est dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ , alors la fonction dérivée de  $f$  est la fonction noté  $f'$  est définie de  $I$  vers  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} f' : I &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

#### Exemples

1- Montrons la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et déterminons la fonction dérivée  $f'(x)$ .

2- Etudier la dérivabilité de la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = \sqrt{x}$  et déterminons la fonction dérivée  $g'(x)$  sur  $0; +\infty[$ .

### 3-2/ La fonction dérivée seconde - la fonction dérivée d'ordre $n$

#### Définition

Soit  $f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de fonction dérivée  $f'$ .

Si  $f'$  est aussi dérivable sur un intervalle  $I$ , alors on dit que  $f$  est dérivable deux fois sur l'intervalle  $I$  et la dérivée de  $f'$  notée  $f''$  est appelée la dérivée seconde de la fonction  $f$ , et on a :  $f'' = (f')'$

Si  $f$  est  $n$  fois sur l'intervalle  $I$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), alors la fonction dérivée de  $f$  d'ordre  $n$  noté  $f^{(n)}$  :

$$\begin{aligned} f^{(n)} : I &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^{(n)}(x) \end{aligned}$$

#### Exemple

Montrons que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2$  est dérivable deux fois sur  $\mathbb{R}$  et déterminons  $f''(x)$ .

### 3-3/ Fonction dérivée des fonctions usuelles

La fonction $f$	L'ensemble de définition de $f$	La fonction $f'$	L'ensemble de définition de $f'$
$f : x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[ \text{ ou } ]-\infty; 0[$
$f : x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto ax + b$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto a$	$\mathbb{R}$

### 3-4/ Opérations sur les fonctions dérivables

#### Propriété

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonction dérivables sur un intervalle  $I$  et  $k \in \mathbb{R}$ , alors on a :

1) La fonction  $f + g$  est dérivable sur l'intervalle  $I$  et on a :  $(f + g)' = f' + g'$

2) La fonction  $k.f$  est dérivable sur l'intervalle  $I$  et on a :  $(k.f)' = k.f'$

3) La fonction  $f \times g$  est dérivable sur l'intervalle  $I$  et on a :

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$$

4) Si de plus  $(\forall x \in I) g(x) \neq 0$ , alors :

- La fonction  $\frac{1}{g}$  est dérivable sur l'intervalle  $I$  et on a :  $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$

- La fonction  $\frac{f}{g}$  est dérivable sur l'intervalle  $I$  et on a :  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

#### Remarque

Toute fonction polynôme est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Dérivée de la somme	$(u + v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(\lambda u)' = \lambda u'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

### Propriété

Si  $f$  est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$ , alors la fonction  $\sqrt{f}$  est dérivable sur  $I$  et :

$$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

## IV- Applications de la dérivation

### 4-1/ Monotonie d'une fonction et signe de sa fonction dérivée

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f$  est croissante sur l'intervalle  $I$ , alors :  $(\forall x \in I) f'(x) \geq 0$
- Si  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $I$ , alors :  $(\forall x \in I) f'(x) \leq 0$
- Si  $f$  est constante sur l'intervalle  $I$ , alors :  $(\forall x \in I) f'(x) = 0$

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si la dérivée  $f'$  est strictement positive sur l'intervalle  $I$ , sauf peut-être en des points isolés de  $I$  où  $f'$  s'annule, alors la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $I$
- Si la dérivée  $f'$  est strictement négative sur l'intervalle  $I$ , sauf peut-être en des points isolés de  $I$  où  $f'$  s'annule, alors la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .
- Si  $f'$  est nulle sur  $I$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .

### 4-2/ Extremums d'une fonction dérivable

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$ .

Si  $f$  admet un extremum local au point  $a$ , alors  $f'(a) = 0$ .

## V- Équations différentielle $y'' + w^2 y = 0$

## Définition

Soit  $w$  un nombre réel non nul.

L'équation  $y'' + w^2 y = 0$  où l'inconnue est une fonction  $y$  telle que  $y''$  est sa dérivée seconde est appelée équation différentielle.

Toute fonction  $f$  deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et vérifie l'égalité

$f''(x) + w^2 f(x) = 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$  est appelée solution de l'équation différentielle  $y'' + w^2 y = 0$ .

## Propriété

Soit  $w$  un nombre réel non nul.

La solution générale de l'équation différentielle  $y'' + w^2 y = 0$  est l'ensemble des fonctions  $y$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto y(x) = \alpha \cos(wx) + \beta \sin(wx)$  où  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

## VI- Exercices

### 6-1/ Exercice 1

1. Étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  au point  $x_0$ , puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu dans chacun des cas suivants :

$$1 \quad f(x) = 3x^2 + x - 2 ; \quad x_0 = 1$$

$$2 \quad f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 2 ; \quad x_0 = 1$$

$$3 \quad f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1} ; \quad x_0 = 0$$

$$4 \quad f(x) = \frac{x^2-3x-1}{x^2+1} ; \quad x_0 = 0$$

$$5 \quad f(x) = \sqrt{x+1} ; \quad x_0 = 3$$

$$6 \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} ; \quad x_0 = 2$$

$$7 \quad f(x) = \sqrt{x+10} ; \quad x_0 = -1$$

### 6-2/ Exercice 2

Soit la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-3}{2x-1} & \text{si } x > 1 \\ f(1) = -2 \end{cases}$$

1. Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 1, et donner une interprétation géométrique du résultat.
2. Étudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en 1, et donner une interprétation géométrique du résultat.
3. Étudier la dérivabilité de  $f$  au point 1.

### 6-3/ Exercice 3

Soit la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3 & \text{si } x < -1 \\ f(x) = \frac{x+4}{2x+3} & \text{si } x > -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

1. Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $-1$ , et donner une interprétation géométrique du résultat.
2. Étudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en  $-1$ , et donner une interprétation géométrique du résultat.
3. Étudier la dérivabilité de  $f$  au point  $-1$ .

## 6-4/ Exercice 4

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

1 $f(x) = 3x^2 + x - 2$	7 $f(x) = x^2 - \sqrt{x+10}$
2 $f(x) = (x^3 + 2x^2 + x - 2)^7$	8 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$
3 $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$	9 $f(x) = (\sqrt{x+3})^3 \sin x$
4 $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x^2+1}$	10 $f(x) = \cos x \sqrt{x+4}$
5 $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$	11 $f(x) = \sin(3x-2) + 5 \cos(7x+3)$
6 $f(x) = (3x+2)\sqrt{x^2 - 3x + 2}$	12 $f(x) = \sin(3x^2 - 2x + 3)$

## 6-5/ Exercice 5

Soit  $f$  la fonction suivante :  $f(x) = \left(\frac{3x-2}{2x+3}\right)^4$

1. Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de  $f$ .
2. Étudier la dérivabilité de  $f$  sur  $D_f$ .
3. Déterminer l'équation cartésienne de la droite tangente ( $T$ ) à la courbe de  $f$  au point  $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ .
4. Déterminer  $f'(x)$  la dérivée de  $f$  sur  $D_f$ .

## 6-6/ Exercice 6

### Partie 1

On considère la fonction  $g$  définie sur  $I = [-2; 3]$  par  $g(x) = 3x - x^3$ .

1. Calculer  $g'(x)$  la fonction dérivée de  $g$  sur  $I$ .
2. Étudier les variations de  $g$ , puis donner son tableau de variations sur  $I$ .
3. Déterminer les extremum de  $g$  sur  $]-\frac{3}{2}; 0[$  et  $[-2; 0]$  et  $I$ .

### Partie 2

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

$$1 \quad y'' + 3y = 0$$

$$2 \quad y'' + 2y = 0$$

$$3 \quad 6y'' + 3y = 0$$