

Sommaire

I- La dérivabilité d'une fonction en un point

1-1/ Le nombre dérivé

1-2/ Interprétation géométrique du nombre dérivé - La tangente à la courbe en un point

1-3/ Approximation d'une fonction dérivable en un point par une fonction affine

II- Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche

2-1/ Définitions et propriétés

2-2/ Interprétation géométrique - Demi droite tangente en un point de la courbe

III- La fonction dérivé d'une fonction dérivable

3-1/ La fonction dérivé

3-2/ La fonction dérivée seconde - la fonction dérivée d'ordre n

3-3/ Fonction dérivée des fonctions usuelles

3-4/ Opérations sur les fonctions dérivables

IV- Applications de la dérivation

4-1/ Monotonie d'une fonction et signe de sa fonction dérivée

4-2/ Extremums d'une fonction dérivable

V- Équations différentielle $y'' + w^2y = 0$

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

6-5/ Exercice 5

6-6/ Exercice 6

I- La dérivabilité d'une fonction en un point

1-1/ Le nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

On dit que la fonction f est dérivable en a , s'il existe un nombre réel l tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$$

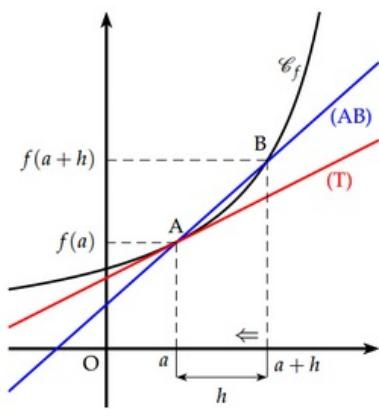
Le réel l est appelé le nombre dérivé de la fonction f en a , il est noté : $f'(a)$

On écrit : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$ ou $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$

Exemple

Étudions la dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto 2x^2$ en $a = 1$

1-2/ Interprétation géométrique du nombre dérivé – La tangente à la courbe en un point



Le coefficient directeur α de la droite (AB) est :

$$\alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si le point B se rapproche du point A (h tend vers 0), la droite (AB) se rapproche de la tangente (T) à la courbe en $x = a$. Le coefficient directeur de cette tangente (T) est appelé **nombre dérivé**. Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition

Soit f une fonction dérivable en un point a et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La droite (T) qui passe par le point $A(a, f(a))$ et qui est à pour coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe (C_f) au point A .

Propriété

Soit f une fonction dérivable en un point a .

Une équation de la droite tangente à la courbe (C_f) de la fonction f au point $A(a, f(a))$ est :

$$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple

Déterminons une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction $x \mapsto f(x) = 2x^2$ au point $A(1, f(1))$.

1-3/ Approximation d'une fonction dérivable en un point par une fonction affine

Définition

Soit f une fonction dérivable en un point a .

La fonction $u : x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ est appelée la fonction affine tangente à la fonction f au point a .

Le réel $f'(a)(x - a) + f(a)$ est l'approximation affine du réel $f(x)$ au voisinage de a , on écrit :

$$f(x) \underset{a}{\sim} f'(a)(x - a) + f(a)$$

II- Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche

2-1/ Définitions et propriétés

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme : $([a; a+r] \mid r > 0)$

On dit que f est dérivable à droite en a s'il existe un réel l tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$$

Le réel l est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en a , et on le note par : $f'_d(a)$

$$\text{On écrit : } f'_d(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme : $(]a-r; a] \mid r > 0)$

On dit que f est dérivable à gauche en a s'il existe un réel l tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$$

Le réel l est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en a , et on le note par : $f'_g(a)$

$$\text{On écrit : } f'_g(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite en a et f est dérivable à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

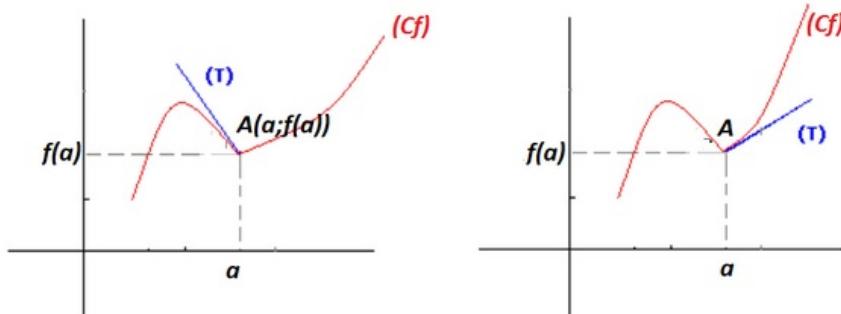
2-2/ Interprétation géométrique - Demi droite tangente en un point de la courbe

Si f est dérivable à droite en a , cela signifie graphiquement que la courbe de la fonction f admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation :

$$(T_d) : y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$$

Si f est dérivable à gauche en a , cela signifie graphiquement que la courbe de la fonction f admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation :

$$(T_g) : y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$$



$$\begin{cases} (T) : y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases} \quad \begin{cases} (T) : y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$$

Résumé de La dérivabilité en un point - Interprétation géométrique du nombre dérivé

La limite	La dérivabilité	Interprétation géométrique
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	f est dérivable en a et on a : $f'(a) = l$	(C_f) admet une tangente d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ au point $A(a; f(a))$.
$\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$	f n'est pas dérivable en a .	(C_f) admet une demi-tangente verticale d'équation $x = a$ au point $A(a; f(a))$.
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	f est dérivable à droite en a et on a : $f'_d(a) = l$	(C_f) admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$ et $x \geq a$.
$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	f est dérivable à gauche en a et on a : $f'_g(a) = l$	(C_f) admet une demi-tangente au point $A(a; f(a))$ d'équation $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$ et $x \leq a$.

III- La fonction dérivé d'une fonction dérivable

3-1/ La fonction dérivé

Définitions

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle ouvert $]a; b[$ si f est dérivable en tout point de $]a; b[$.

On dit qu'une fonction f est dérivable sur l'intervalle fermer $[a; b]$ si f est dérivable sur $]a; b[$ et f dérivable à droite en a et à gauche en b .

Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I , alors la fonction dérivée de f est la fonction noté f' est définie de I vers \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f' : I &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

Exemples

1- Montrons la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} et déterminons la fonction dérivée $f'(x)$.

2- Etudier la dérivabilité de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$ et déterminons la fonction dérivée $g'(x)$ sur $0; +\infty[$.

3-2/ La fonction dérivée seconde - la fonction dérivée d'ordre n

Définition

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I de fonction dérivée f' .

Si f' est aussi dérivable sur un intervalle I , alors on dit que f est dérivable deux fois sur l'intervalle I et la dérivée de f' notés f'' est appelée la dérivée seconde de la fonction f , et on a : $f'' = (f')$

Si f est n fois sur l'intervalle I ($n \in \mathbb{N}^*$), alors la fonction dérivée de f d'ordre n noté $f^{(n)}$:

$$\begin{aligned} f^{(n)} : I &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Exemple

Montrons que la fonction f définie par $f(x) = x^2$ est dérivable deux fois sur \mathbb{R} et déterminons $f''(x)$.

3-3/ Fonction dérivée des fonctions usuelles

La fonction f	L'ensemble de définition de f	La fonction f'	L'ensemble de définition de f'
$f : x \mapsto a$ ($a \in \mathbb{R}$)	\mathbb{R}	$f' : x \mapsto 0$	\mathbb{R}
$f : x \mapsto x$	\mathbb{R}	$f' : x \mapsto 1$	\mathbb{R}
$f : x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$)	\mathbb{R}	$f' : x \mapsto nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	$f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$]0; +\infty[\text{ ou } -\infty; 0[$
$f : x \mapsto \sin(x)$	\mathbb{R}	$f' : x \mapsto \cos(x)$	\mathbb{R}
$f : x \mapsto \cos(x)$	\mathbb{R}	$f' : x \mapsto -\sin(x)$	\mathbb{R}
$f : x \mapsto ax + b$	\mathbb{R}	$f' : x \mapsto a$	\mathbb{R}

3-4/ Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété

Si f et g sont deux fonction dérивables sur un intervalle I et $k \in \mathbb{R}$, alors on a :

- 1) La fonction $f + g$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(f + g)' = f' + g'$
- 2) La fonction $k \cdot f$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(k \cdot f)' = k \cdot f'$
- 3) La fonction $f \times g$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$
- 4) Si de plus ($\forall x \in I$) $g(x) \neq 0$, alors :

- La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$
- La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur l'intervalle I et on a : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

Remarque

Toute fonction polynôme est dérivable sur \mathbb{R} .

Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Dérivée de la somme	$(u + v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire	$(\lambda u)' = \lambda u'$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
Dérivée de la racine	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Propriété

Si f est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction \sqrt{f} est dérivable sur I et :

$$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

IV- Applications de la dérivation

4-1/ Monotonie d'une fonction et signe de sa fonction dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f est croissante sur l'intervalle I , alors : $(\forall x \in I) f'(x) \geq 0$
- Si f est décroissante sur l'intervalle I , alors : $(\forall x \in I) f'(x) \leq 0$
- Si f est constante sur l'intervalle I , alors : $(\forall x \in I) f'(x) = 0$

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si la dérivée f' est strictement positive sur l'intervalle I , sauf peut-être en des points isolés de I où f' s'annule, alors la fonction f est strictement croissante sur I
- Si la dérivée f' est strictement négative sur l'intervalle I , sauf peut-être en des points isolés de I où f' s'annule, alors la fonction f est strictement décroissante sur I .
- Si f' est nulle sur I , alors f est constante sur I .

4-2/ Extremums d'une fonction dérivable

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

Si f admet un extremum local au point a , alors $f'(a) = 0$.

V- Équations différentielles $y'' + w^2y = 0$

Définition

Soit w un nombre réel non nul.

L'équation $y'' + w^2y = 0$ où l'inconnue est une fonction y telle que y'' est sa dérivée seconde est appelée équation différentielle.

Toute fonction f deux fois dérivable sur \mathbb{R} et vérifie l'égalité

$f''(x) + w^2f(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ est appelée solution de l'équation différentielle $y'' + w^2y = 0$.

Propriété

Soit w un nombre réel non nul.

La solution générale de l'équation différentielle $y'' + w^2y = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto y(x) = \alpha \cos(wx) + \beta \sin(wx)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

- Étudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 , puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{ll} 1 \ f(x) = 3x^2 + x - 2 ; \ x_0 = 1 \\ 2 \ f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 2 ; \ x_0 = 1 \\ 3 \ f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1} ; \ x_0 = 0 \\ 4 \ f(x) = \frac{x^2-3x-1}{x^2+1} ; \ x_0 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 5 \ f(x) = \sqrt{x+1} ; \ x_0 = 3 \\ 6 \ f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} ; \ x_0 = 2 \\ 7 \ f(x) = \sqrt{x+10} ; \ x_0 = -1 \end{array}$$

6-2/ Exercice 2

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-3}{2x-1} & \text{si } x > 1 \\ f(1) = -2 \end{cases}$$

- Étudier la dérivabilité de f à droite en 1, et donner une interprétation géométrique du résultat.
- Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1, et donner une interprétation géométrique du résultat.
- Étudier la dérivabilité de f au point 1.

6-3/ Exercice 3

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3 & \text{si } x < -1 \\ f(x) = \frac{x+4}{2x+3} & \text{si } x > -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

- Étudier la dérivabilité de f à droite en -1 , et donner une interprétation géométrique du résultat.
- Étudier la dérivabilité de f à gauche en -1 , et donner une interprétation géométrique du résultat.
- Étudier la dérivabilité de f au point -1 .

6-4/ Exercice 4

- Déterminer la fonction dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$1 \quad f(x) = 3x^2 + x - 2$$

$$2 \quad f(x) = (x^3 + 2x^2 + x - 2)^7$$

$$3 \quad f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$$

$$4 \quad f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x^2+1}$$

$$5 \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$6 \quad f(x) = (3x+2)\sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$7 \quad f(x) = x^2 - \sqrt{x+10}$$

$$8 \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$$

$$9 \quad f(x) = (\sqrt{x+3})^3 \sin x$$

$$10 \quad f(x) = \cos x \sqrt{x+4}$$

$$11 \quad f(x) = \sin(3x-2) + 5 \cos(7x+3)$$

$$12 \quad f(x) = \sin(3x^2 - 2x + 3)$$

6-5/ Exercice 5

Soit f la fonction suivante : $f(x) = \left(\frac{3x-2}{2x+3}\right)^4$

- Déterminer D_f le domaine de définition de f .
- Étudier la dérivabilité de f sur D_f .
- Déterminer l'équation cartésienne de la droite tangente (T) à la courbe de f au point $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$.
- Déterminer $f'(x)$ la dérivée de f sur D_f .

6-6/ Exercice 6

Partie 1

On considère la fonction g définie sur $I = [-2; 3]$ par $g(x) = 3x - x^3$.

- Calculer $g'(x)$ la fonction dérivée de g sur I .
- Étudier les variations de g , puis donner son tableau de variations sur I .
- Déterminer les extrémum de g sur $\left]-\frac{3}{2}; 0\right[$ et $[-2; 0]$ et I .

Partie 2

- Résoudre dans \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

$$1 \quad y'' + 3y = 0$$

$$2 \quad y'' + 2y = 0$$

$$3 \quad 6y'' + 3y = 0$$