



Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 10-1-1 : Structures algébriques - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Loi de composition interne

1-1/ Introduction

1-2/ Définition d'une loi de composition interne

1-3/ Partie stable - Loi induite

II- Propriétés d'une loi de composition interne

2-1/ Associativité - Commutativité

2-2/ L'élément neutre

2-3/ Symétrique d'un élément

2-4/ Élément régulier d'une loi de composition interne

III- Morphismes

3-1/ Définition d'un morphisme

3-2/ Propriétés d'un morphisme

I- Loi de composition interne

1-1/ Introduction

L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n	Notation : $\mathcal{P}_n$ ou $\mathbb{R}_n[X]$
$P \in \mathcal{P}_n$ signifie que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n $\left(\forall (P; Q) \in \mathcal{P}_n^2 \right) \left(\forall x \in \mathbb{R} \right) \begin{cases} (P+Q)(x) = P(x) + Q(x) \\ (P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x) \end{cases}$	
L'ensemble des fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$	Notation : $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$
$\mathcal{F}(I; \mathbb{R}) = \{ f / f : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \}$ $\left(\forall (f; g) \in (\mathcal{F}(I; \mathbb{R}))^2 \right) \left(\forall x \in I \right) \begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \end{cases}$	

L'ensemble des classes modulo n	Notation : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}; \overline{1}; \overline{2}; \dots; \overline{n}\}$ Pour tous $\overline{x}$ et $\overline{y}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$ et $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{x \times y}$	
L'ensemble des parties d'un ensemble A	Notation : $\mathcal{P}(A)$
$X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subset A$ Pour tous X et Y de $\mathcal{P}(A)$: $x \in X \cap Y \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \in Y)$; $x \in X \cup Y \Leftrightarrow (x \in X \text{ ou } x \in Y)$ $x \in \overline{X} \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin X)$; $x \in X - Y \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \notin Y)$; $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$	
L'ensemble des matrices carrées d'ordre 2	Notation : $M_2(\mathbb{R})$
$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} / (a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$ On définit l'addition et la multiplication dans $M_2(\mathbb{R})$ comme suit : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & c+z \\ b+y & d+t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & az+ct \\ bx+dy & bz+dt \end{pmatrix}$	
L'ensemble des matrices carrées d'ordre 3	Notation : $M_3(\mathbb{R})$
$M_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} / (a_1; a_2; a_3; b_1; b_2; b_3; c_1; c_2; c_3) \in \mathbb{R}^9 \right\}$ On définit l'addition et la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$ comme suit : $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+x_1 & a_2+x_2 & a_3+x_3 \\ b_1+y_1 & b_2+y_2 & b_3+y_3 \\ c_1+z_1 & c_2+z_2 & c_3+z_3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1+a_2y_1+a_3z_1 & a_1x_2+a_2y_2+a_3z_2 & a_1x_3+a_2y_3+a_3z_3 \\ b_1x_1+b_2y_1+b_3z_1 & b_1x_2+b_2y_2+b_3z_2 & b_1x_3+b_2y_3+b_3z_3 \\ c_1x_1+c_2y_1+c_3z_1 & c_1x_2+c_2y_2+c_3z_2 & c_1x_3+c_2y_3+c_3z_3 \end{pmatrix}$	
L'ensemble des transformations du plan	Notation : $\mathcal{T}$
Toute application bijective de plan $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ s'appelle une transformation du plan. Les translations, les homothéties et les rotations font parties de l'ensemble des transformations $\mathcal{T}$. $(\forall (f; g) \in \mathcal{T}^2) (\forall M \in \mathcal{P}) \quad (f \circ g)(M) = f(g(M))$	

1-2/ Définition d'une loi de composition interne

Définition 1

On appelle loi de composition interne sur un ensemble E , toute application de $E \times E$ dans E .

Traditionnellement, on utilise la notation $x * y$ pour désigner l'image d'un couple $(x; y) \in E \times E$ par une loi $*$ plutôt qu'une notation fonctionnelle.

On note $(E; *)$ un ensemble E muni d'une loi de composition interne « $*$ ».

Applications

Pour tous x et y de $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, on pose : $x * y = x + y - 2xy$.

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Sur l'intervalle $I =]-1; 1[$, on définit la relation $\perp$ par :

$$(\forall (x; y) \in I^2) \quad x \perp y = \frac{x+y}{1+xy}$$

2. La relation $\perp$ est-elle une loi de composition interne sur I ? Justifier.

On considère l'ensemble $E = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ où les fonctions f_i ($i \in \{1; 2; 3; 4\}$) des fonctions numériques définies de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_1 : x \mapsto x ; \quad f_2 : x \mapsto -x ; \quad f_3 : x \mapsto \frac{1}{x} ; \quad f_4 : x \mapsto -\frac{1}{x}$$

3. Dresser la table de $(E; \circ)$.
4. Montrer que $\circ$ (composition des fonctions) est une loi de composition interne sur E .

1-3/ Partie stable - Loi induite

Définition 2

Soit $(E; *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne et F une partie de E .

On dit que F est stable par $*$ si : $(\forall (x; y) \in F^2) \quad x * y \in F$

La loi de composition interne alors définie sur F par $F^2 \rightarrow F$
 $(x; y) \mapsto x * y$ est appelée loi induite par $*$ sur F .

Applications

On considère l'ensemble $S = \{x^2 + y^2 / (x; y) \in \mathbb{N}^2\}$

1. Montrer que S est une partie stable de $(\mathbb{N}; \times)$.
2. L'ensemble S est-il stable pour l'addition dans $\mathbb{N}$? Justifier.

On considère les ensembles $A = \{3^n \times 2^m / (n; m) \in \mathbb{N}^2\}$ et $B = \{n^2 / n \in \mathbb{N}\}$

3. Étudier la stabilité de A pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}$.
4. Étudier la stabilité de B pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}$.

On considère l'ensemble $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} / (a; b; c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

5. Montrer que G est une partie stable de $(M_3(\mathbb{R}); \times)$

II- Propriétés d'une loi de composition interne

2-1/ Associativité - Commutativité

Définition 3

Soit $(E; *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

On dit que la loi $*$ est associative dans $(E; *)$ si :

$$(\forall (a; b; c) \in E^3) \quad (a * b) * c = a * (b * c)$$

On dit que la loi $*$ est commutative dans $(E; *)$ si :

$$(\forall (a; b) \in E^2) \quad a * b = b * a$$

Remarques

La loi $*$ n'est pas commutative dans $(E; *)$ signifie que :

$$(\exists (a; b) \in E^2) \quad a * b \neq b * a$$

La loi $*$ n'est pas associative dans $(E; *)$ signifie que :

$$(\exists (a; b; c) \in E^3) \quad (a * b) * c \neq a * (b * c)$$

Si la loi $*$ est associative dans $(E; *)$, alors on peut supprimer les parenthèses et écrire :

$$(a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$$

Applications

Étudier la commutativité et l'associativité de la loi de composition interne T définie sur $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par :

$$(a; b)T(x; y) = (ax; ay + bx)$$

2-2/ L'élément neutre

Définition 5

Soit $(E; *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

Un élément e de $(E; *)$ est dit neutre si : $(\forall x \in E) \quad e * x = x * e = x$

Remarques

- Si la loi $*$ est commutative dans $(E; *)$, alors une des relations de la définition 5 suffit.

On peut prendre alors soit $(\forall x \in E) \quad e * x = x$, ou bien $(\forall x \in E) \quad x * e = x$.

- Si S est une partie stable de $(E; *)$, et si e est neutre dans $(E; *)$, alors cela n'implique pas que e est neutre dans $(S; *)$.

À titre d'exemple : Prenons $E = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $S = \{\bar{0}; \bar{2}; \bar{4}\}$

$\bar{1}$ est neutre dans E et $\bar{4}$ est neutre dans S .

Applications

On munit l'ensemble $\mathbb{Z}$ d'une loi de composition interne $*$ définie par :

$$(\forall (x; y) \in \mathbb{Z}^2) \quad x * y = x + y - 3$$

1. Montrer que $(\mathbb{Z}; *)$ admet un élément neutre.

On considère l'ensemble : $A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} / (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

2. Montrer que $\times$ est une loi de composition interne sur A .

3. Est-ce-que $(A; \times)$ admet un élément neutre ? Justifier.

Proposition 1

Soit $(E; *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

Si e et e' sont deux éléments neutres pour la loi $*$ dans E , alors $e = e'$.

Autrement dit : un élément neutre pour une loi de composition interne, lorsqu'il existe, est unique.

2-3/ Symétrique d'un élément

Définition 6

Soit $(E; *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne et possédant un élément neutre e .

Un élément $a \in E$ est dit symétrisable (ou inversible) pour $*$ s'il existe un élément $a' \in E$ tel que $a * a' = a' * a = e$

Un tel élément a' (s'il existe) est appelé un symétrique (ou inverse) de a pour $*$.

Remarques

Si a' est un symétrique de a pour la loi $*$, alors a est un symétrique de a' pour la même loi.

Si la loi $*$ est commutative, alors on peut se contenter de l'une des relations $a * a' = e$ ou $a' * a = e$.

Si a' est un symétrique de a pour la loi $*$, on dit alors que a et a' sont symétriques dans $(E; *)$.

Proposition 2

Soit $(E; *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et possédant un élément neutre e .

Si un élément $a \in E$ est symétrisable, alors, le symétrique de a est unique.

Remarques

Le symétrique d'un élément a se note :

- a^{-1} pour une loi notée multiplicativement et s'appelle inverse de a .
- $-a$ pour une loi notée additivement et s'appelle opposé de a .

Lorsque f est une bijection de E dans E , il n'y a donc pas ambiguïté dans la notation f^{-1} , il s'agit aussi bien de son application réciproque que de son inverse pour la loi $\circ$.

Proposition 3

Soit $(E; *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et possédant un élément neutre e .

Si a et b sont deux éléments symétrisables, alors $a * b$ est aussi symétrisable et son symétrique est $(a * b)' = b' * a'$, où a' et b' sont respectivement les symétriques de a et b .

Applications

On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne définie comme suit :

$$(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \quad x * y = x + y + \frac{1}{2}xy$$

1. Montrer que la loi $*$ est associative.
2. Montrer que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
3. Déterminer les éléments symétrisables pour la loi $*$.
4. Montrer que le symétrique de -1 est 2 , et que le symétrique de 6 est -3 .

2-4/ Élément régulier d'une loi de composition interne

Définition 7

Soit $(E; *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

Un élément $a \in E$ est dit régulier ou simplifiable si, et seulement si :

$$(\forall (x; y) \in E^2) \quad \begin{cases} a * x = a * y \Rightarrow x = y & 1 \\ x * a = y * a \Rightarrow x = y & 2 \end{cases}$$

Remarque

Si la loi $*$ est commutative dans E , alors l'une des implications 1 ou 2 suffit pour que l'élément a soit régulier dans $(E; *)$.

Applications

On considère l'ensemble $\mathbb{N}^*$ muni de la loi de composition interne définie par $a \wedge b = c$, où c est le plus grand commun diviseur des entiers a et b .

Est-ce-que tout élément de $\mathbb{N}^*$ est régulier dans $(\mathbb{N}^*; \wedge)$? Justifier.

III- Morphismes

3-1/ Définition d'un morphisme

Définition 8

Soit $(E; *)$ et $(F; T)$ deux ensembles munis de lois de composition interne, et soit f une application de E dans F .

On dit que f est un morphisme de $(E; *)$ dans $(F; T)$ lorsque :

$$(\forall (x; y) \in E^2) \quad f(x * y) = f(x) T f(y)$$

Définition 9

Un morphisme s'appelle aussi un homomorphisme.

Un endomorphisme de $(E; *)$ est un morphisme de $(E; *)$ dans lui-même.

Un isomorphisme est un morphisme bijectif.

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

Applications

Soit f_a l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2) \quad f_a(x; y) = \left(ax; \frac{y}{a}\right) \quad (\text{où } a \in \mathbb{R}^*)$$

1. Montrer que f_a est une application bijective.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications f_a quand a varie sur $\mathbb{R}^*$.

2. Déterminer l'application $f_{a'} \circ f_a$ où $(a; a') \in (\mathbb{R}^*)^2$.

3. En déduire que la composition des applications $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{F}$.

On considère l'application :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^* &\rightarrow \mathcal{F} \\ a &\mapsto f_a \end{aligned}$$

4. Montrer que h est un morphisme de $(\mathbb{R}^*; \times)$ dans $(\mathcal{F}; \circ)$.

3-2/ Propriétés d'un morphisme

Proposition 4

Soit f un morphisme de $(E; *)$ dans $(F; T)$.

1- $f(E)$ est une partie stable de $(F; T)$.

2- Si la loi $*$ est associative dans $(E; *)$, alors la loi T est associative dans $(f(E); T)$.

3- Si la loi $*$ est commutative dans $(E; *)$, alors la loi T est commutative dans $(f(E); T)$.

4- Si la loi $*$ admet un élément neutre e dans $(E; *)$, alors $f(e)$ est un élément neutre dans $(f(E); T)$.

5- Si la loi $*$ admet un élément neutre e dans $(E; *)$, et un élément x admet un symétrique x' dans $(E; *)$, alors $f(x)$ admet un symétrique dans $(f(E); T)$ qui est $f(x')$.

Corollaire

Si f est un isomorphisme de $(E; *)$ dans $(F; T)$ (c'est-à-dire morphisme bijectif), alors f transfère les propriétés de la loi $*$ dans $(E; *)$ vers la loi T de $(F; T)$, et va ainsi conserver toutes les propriétés liées à cette loi.

On exprime ce résultat en disant que $(E; *)$ et $(F; T)$ ont la même structure.