Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 10-1-1 : Structures algébriques - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Loi de composition interne

1-1/ Introduction

L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n	Notation : $\mathcal{P}_n$ ou $\mathbb{R}_n[X]$
$P \in \mathcal{P}_n$ signifie que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n $\left(\forall (P;Q) \in \mathcal{P}_n^2\right)\ (\forall x \in \mathbb{R})\ \begin{cases} (P+Q)(x) = P(x)+Q(x) \\ (P\times Q)(x) = P(x)\times Q(x) \end{cases}$	

L'ensemble des fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$	Notation : $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$
$\mathcal{F}(I;\mathbb{R}) = \{f \ / \ f : I \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto f(x)\}$ $\left(\forall (f;g) \in (\mathcal{F}(I;\mathbb{R}))^2\right)\ (\forall x \in I)\ \begin{cases} (f+g)(x) = f(x)+g(x) \\ (f\times g)(x) = f(x)\times g(x) \end{cases}$	

L'ensemble des classes modulo n	Notation : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0};\overline{1};\overline{2};\dots;\overline{n}\}$$

Pour tous $\overline{x}$ et $\overline{y}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: $\overline{x}+\overline{y}=\overline{x+y}$ et $\overline{x}\times\overline{y}=\overline{x\times y}$

L'ensemble des parties d'un ensemble A	Notation : $\mathscr{P}(A)$

$$X \in \mathscr{P}(A) \Leftrightarrow X \subset A$$

Pour tous X et Y de $\mathscr{P}(A)$: $x \in X \cap Y \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \in Y)$; $x \in X \cup Y \Leftrightarrow (x \in X \text{ ou } x \in Y)$

$x \in \overline{X} \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin X)$; $x \in X - Y \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \notin Y)$; $X \Delta Y = (X-Y)\cup(Y-X)$

L'ensemble des matrices carrées d'ordre 2	Notation : $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

$$\mathbb{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} / (a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

On définit l'addition et la multiplication dans $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & c+z \\ b+y & d+t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & az+ct \\ bx+dy & bz+dt \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices carrées d'ordre 3	Notation : $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$

$$\mathbb{M}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} / (a_1;a_2;a_3;b_1;b_2;b_3;c_1;c_2;c_3) \in \mathbb{R}^9 \right\}$$

On définit l'addition et la multiplication dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+x_1 & a_2+x_2 & a_3+x_3 \\ b_1+y_1 & b_2+y_2 & b_3+y_3 \\ c_1+z_1 & c_2+z_2 & c_3+z_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1+a_2y_1+a_3z_1 & a_1x_2+a_2y_2+a_3z_2 & a_1x_3+a_2y_3+a_3z_3 \\ b_1x_1+b_2y_1+b_3z_1 & b_1x_2+b_2y_2+b_3z_2 & b_1x_3+b_2y_3+b_3z_3 \\ c_1x_1+c_2y_1+c_3z_1 & c_1x_2+c_2y_2+c_3z_2 & c_1x_3+c_2y_3+c_3z_3 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des transformations du plan	Notation : $\mathscr{T}$

Toute application bijective de plan $\mathscr{P}$ vers $\mathscr{P}$ s'appelle une transformation du plan.

Les translations, les homothéties et les rotations font parties de l'ensemble des transformations $\mathscr{T}$.

$$(\forall (f;g) \in \mathscr{T}^2)(\forall M \in \mathscr{P}) \quad (fog)(M) = f(g(M))$$

1-2/ Définition d'une loi de composition interne

Définition 1

On appelle loi de composition interne sur un ensemble E, toute application de $E \times E$ dans E.

Traditionnellement, on utilise la notation $x * y$ pour désigner l'image d'un couple $(x;y) \in E \times E$ par une loi $*$ plutôt qu'une notation fonctionnelle.

On note $(E;*)$ un ensemble E muni d'une loi de composition interne « $*$ ».

Applications

Pour tous x et y de $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$, on pose : $x*y=x+y-2xy$.

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Sur l'intervalle $I=]-1;1[$, on définit la relation $\perp$ par :
$\left(\forall (x;y)\in I^2\right)\;\; x\perp y=\frac{x+y}{1+xy}$

2. La relation $\perp$ est-elle une loi de composition interne sur I ? Justifier.

On considère l'ensemble $E=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ où les fonctions $f_i\ (i\in\{1;2;3;4\})$ des fonctions numériques définies de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_1:x\mapsto x\;\;;\;\;f_2:x\mapsto -x\;\;;\;\;f_3:x\mapsto \frac{1}{x}\;\;;\;\;f_4:x\mapsto -\frac{1}{x}$$

3. Dresser la table de $(E;\circ)$.
4. Montrer que $\circ$ (composition des fonctions) est une loi de composition interne sur E.

1-3/ Partie stable - Loi induite

Définition 2

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne et F une partie de E.

On dit que F est stable par $*$ si : $\left(\forall (x;y)\in F^2\right)\;\; x*y\in F$

La loi de composition interne alors définie sur F par $F^2\to F$
$(x;y)\mapsto x*y$ est appelée loi induite par $*$ sur F.

Applications

On considère l'ensemble $S=\left\{x^2+y^2/\,(x;y)\in\mathbb{N}^2\right\}$

1. Montrer que S est une partie stable de $(\mathbb{N};\times)$.
2. L'ensemble S est-il stable pour l'addition dans $\mathbb{N}$? Justifier.

On considère les ensembles $A=\left\{3^n\times 2^m/\,(n;m)\in\mathbb{N}^2\right\}$ et $B=\left\{n^2/n\in\mathbb{N}\right\}$

3. Étudier la stabilité de A pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}$.
4. Étudier la stabilité de B pour l'addition et la multiplication dans $\mathbb{N}$.

On considère l'ensemble $G=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}/\,(a;b;c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

5. Montrer que G est une partie stable de $(\mathbb{M}_3(\mathbb{R});\times)$

II- Propriétés d'une loi de composition interne

2-1/ Associativité - Commutativité

Définition 3

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

On dit que la loi $*$ est associative dans $(E;*)$ si :

$$\left(\forall\,(a;b;c)\in E^3\right)\quad (a*b)*c=a*(b*c)$$

On dit que la loi $*$ est commutative dans $(E;*)$ si :

$$\left(\forall\,(a;b)\in E^2\right)\;\; a*b=b*a$$

Remarques

La loi $*$ n'est pas commutative dans $(E;*)$ signifie que :

$$\left(\exists\,(a;b)\in E^2\right)\;\; a*b\neq b*a$$

La loi $*$ n’est pas associative dans $(E;*)$ signifie que :

$$\left(\exists\,(a;b;c)\in E^3\right)\quad (a*b)*c\neq a*(b*c)$$

Si la loi $*$ est associative dans $(E;*)$, alors on peut supprimer les parenthèses et écrire :

$$(a*b)*c=a*(b*c)=a*b*c$$

Applications

Étudier la commutativité et l’associativité de la loi de composition interne T définie sur $E=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ par :

$$(a;b)T\,(x;y)=(ax;ay+bx)$$

2-2/ L'élément neutre

Définition 5

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d’une loi de composition interne.

Un élément e de $(E;*)$ est dit neutre si : $(\forall x\in E)\; e*x=x*e=x$

Remarques

- Si la loi $*$ est commutative dans $(E;*)$, alors une des relations de la définition 5 suffit.

On peut prendre alors soit $(\forall x\in E)\; e*x=x$, ou bien $(\forall x\in E)\; x*e=x$.

- Si S est une partie stable de $(E;*)$, et si e est neutre dans $(E;*)$, alors cela n'implique pas que e est neutre dans $(S;*)$.

À titre d'exemple : Prenons $E=\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $S=\left\{\bar{0};\bar{2};\bar{4}\right\}$

$\bar{1}$ est neutre dans E et $\bar{4}$ est neutre dans S.

Applications

On munit l’ensemble $\mathbb{Z}$ d’une loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall\,(x;y)\in\mathbb{Z}^2\right)\; x*y=x+y-3$$

1. Montrer que $(\mathbb{Z};*)$ admet un élément neutre.

On considère l’ensemble : $A=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} / \;(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$

2. Montrer que $\times$ est une loi de composition interne sur A.
3. Est-ce-que $(A;\times)$ admet un élément neutre ? Justifier.

Proposition 1

Soit $(E; *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

Si e et e' sont deux éléments neutres pour la loi $*$ dans E, alors $e = e$'.

Autrement dit : un élément neutre pour une loi de composition interne, lorsqu'il existe, est unique.

2-3/ Symétrique d'un élément

Définition 6

Soit $(E; *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne et possédant un élément neutre e.

Un élément $a \in E$ est dit symétrisable (ou inversible) pour $*$ s'il existe un élément a' $\in E$ tel que $a * a$' $= a$' $* a = e$

Un tel élément a' (s'il existe) est appelé un symétrique (ou inverse) de a pour $*$.

Remarques

Si a' est un symétrique de a pour la loi $*$, alors a est un symétrique de a' pour la même loi.

Si la loi $*$ est commutative, alors on peut se contenter de l'une des relations $a * a$' $= e$ ou a' $* a = e$.

Si a' est un symétrique de a pour la loi $*$, on dit alors que a et a' sont symétriques dans $(E; *)$.

Proposition 2

Soit $(E; *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et possédant un élément neutre e.

Si un élément $a \in E$ est symétrisable, alors, le symétrique de a est unique.

Remarques

Le symétrique d'un élément a se note :

- a^{-1} pour une loi notée multiplicativement et s'appelle inverse de a.
- $-a$ pour une loi notée additivement et s'appelle opposé de a.

Lorsque f est une bijection de E dans E, il n'y a donc pas ambiguïté dans la notation f^{-1}, il s'agit aussi bien de son application réciproque que de son inverse pour la loi $\circ$.

Proposition 3

Soit $(E; *)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et possédant un élément neutre e.

Si a et b sont deux éléments symétrisables, alors $a * b$ est aussi symétrisable et son symétrique est $(a * b)$' $= b$' $* a$', où a' et b' sont respectivement les symétriques de a et b.

Applications

On munit $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne définie comme suit :

$$\left(\forall\left(x;y\right)\in\mathbb{R}^{2}\right)\ x*y=x+y+\frac{1}{2}xy$$

1. Montrer que la loi $*$ est associative.
2. Montrer que $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.
3. Déterminer les éléments symétrisables pour la loi $*$.
4. Montrer que le symétrique de -1 est 2, et que le symétrique de 6 est -3.

2-4/ Élément régulier d'une loi de composition interne

Définition 7

Soit $(E;*)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne.

Un élément $a\in E$ est dit régulier ou simplifiable si, et seulement si :

$$\left(\forall\left(x;y\right)\in E^{2}\right)\ \begin{cases}a*x=a*y\Rightarrow x=y\ 1\\ x*a=y*a\Rightarrow x=y\ 2\end{cases}$$

Remarque

Si la loi $*$ est commutative dans E, alors l'une des implications 1 ou 2 suffit pour que l'élément a soit régulier dans $(E;*)$..

Applications

On considère l'ensemble $\mathbb{N}^*$ muni de la loi de composition interne définie par $a\wedge b=c$, où c est le plus grand commun diviseur des entiers a et b.

Est-ce-que tout élément de $\mathbb{N}^*$ est régulier dans $(\mathbb{N}^*;\wedge)$? Justifier.

III- Morphismes

3-1/ Définition d'un morphisme

Définition 8

Soit $(E;*)$ et $(F;T)$ deux ensembles munis de lois de composition interne, et soit f une application de E dans F.

On dit que f est un morphisme de $(E;*)$ dans $(F;T)$ lorsque :

$$\left(\forall\left(x;y\right)\in E^{2}\right)\ f\left(x*y\right)=f\left(x\right)Tf\left(y\right)$$

Définition 9

Un morphisme s'appelle aussi un homomorphisme.

Un endomorphisme de $(E;*)$ est un morphisme de $(E;*)$ dans lui-même.

Un isomorphisme est un morphisme bijectif.

Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

Applications

Soit f_a l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par
$\left(\forall\left(x;y\right)\in\mathbb{R}^{2}\right)\ f_{a}\left(x;y\right)=\left(ax;\frac{y}{a}\right)$ (où $a\in\mathbb{R}^*$)

1. Montrer que f_a est une application bijective.

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des applications f_a quand a varie sur $\mathbb{R}^*$.

2. Déterminer l'application $f_{a'} \circ f_a$ où $(a; a') \in (\mathbb{R}^*)^2$.
3. En déduire que la composition des applications $\circ$ est une loi de composition interne sur $\mathscr{F}$.

On considère l'application :

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^* &\to \mathscr{F} \\ a &\mapsto f_a \end{aligned}$$

4. Montrer que h est un morphisme de $(\mathbb{R}^*; \times)$ dans $(\mathscr{F}; \circ)$.

3-2/ Propriétés d'un morphisme

Proposition 4

Soit f un morphisme de $(E; *)$ dans $(F; T)$.

1- $f(E)$ est une partie stable de $(F; T)$.

2- Si la loi $*$ est associative dans $(E; *)$, alors la loi T est associative dans $(f(E); T)$.

3- Si la loi $*$ est commutative dans $(E; *)$, alors la loi T est commutative dans $(f(E); T)$.

4- Si la loi $*$ admet un élément neutre e dans $(E; *)$, alors $f(e)$ est un élément neutre dans $(f(E); T)$.

5- Si la loi $*$ admet un élément neutre e dans $(E; *)$, et un élément x admet un symétrique x' dans $(E; *)$, alors $f(x)$ admet un symétrique dans $(f(E); T)$ qui est $f(x')$.

Corollaire

Si f est un isomorphisme de $(E; *)$ dans $(F; T)$ (c'est-à-dire morphisme bijectif), alors f transfère les propriétés de la loi $*$ dans $(E; *)$ vers la loi T de $(F; T)$, et va ainsi conserver toutes les propriétés liées à cette loi.

On exprime ce résultat en disant que $(E; *)$ et $(F; T)$ ont la même structure.