AlloSchool

Mathématiques : Tronc Commun

Séance 12 (Transformations du plan)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Transformations dans le plan

Définition

Toute relation qui associe à tout point M du plan (P) au point M' de (P) tel que M' vérifie une ou plusieurs conditions, on l'appelle transformation du plan (P), on la note t ou h ou r ou $S_{(D)}$ ....

On écrit $t\ :\ \ (P)\rightarrow(P)$

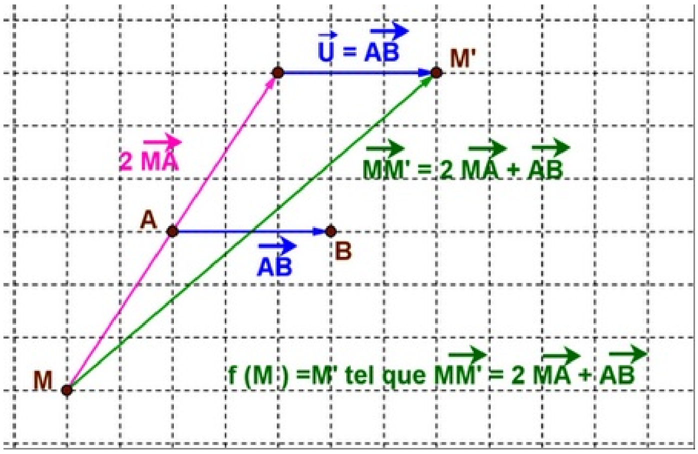
$M\mapsto t\left(M\right)=M$'

On dit que le point M a pour image M' par la transformation t, ou encore le point M' est l'image du point M.

Exemple

Soient A et B deux points du plan (P).

Soit la transformation f du plan (P) définie par $f\left(M\right) = M'$ tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$



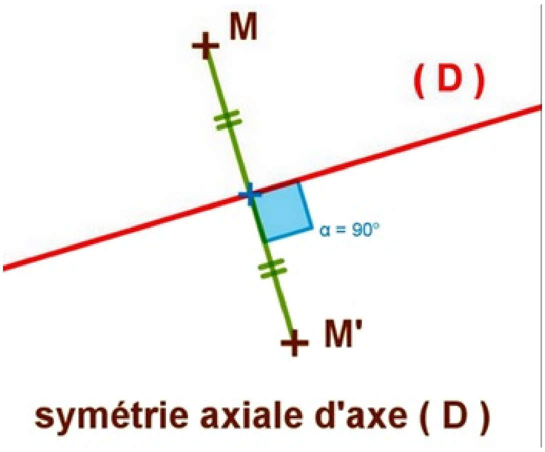
II- Symétrie axiale

Définition

La symétrie axiale S_D de droite (D) du plan (P) est la transformation qui transforme tout point M de (P) au point M' tel que la droite (D) soit la médiatrice du segment $[MM']$.

On écrit $S_D\left(M\right) = M'$

Exemple



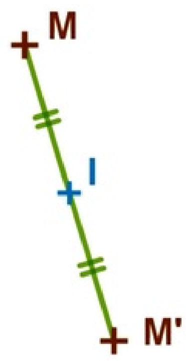
III- Symétrie centrale

Définition

La symétrie centrale S_I de centre le point I du plan (P) est la transformation qui transforme tout point M de (P) au point M' tel que le point I soit le milieu du segment $[MM']$.

On écrit $S_I\left(M\right) = M'$

Exemple



symétrie centrale de centre I

Remarques

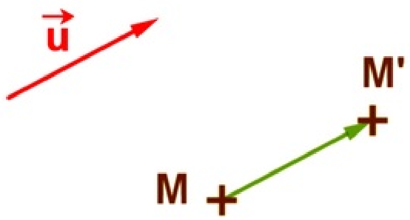
$S_I\left(M\right)=M’$ équivaut à $\overrightarrow{IM’}=-\overrightarrow{IM}$
$S_I\left(M\right)=M’$ équivaut à $S_I\left(M’\right)=M$
I est le seul point invariant par la symétrie centrale S_I, d’où $S_I\left(I\right)=I$.

IV- Translation

Définition

La translation du vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan $\left(P\right)$ est la transformation qui transforme tout point M de $\left(P\right)$ au point $M’$ tel que le point $\overrightarrow{MM’}=\overrightarrow{u}$.
On note la translation par $t_{\overrightarrow{u}}$
On écrit : $t_{\overrightarrow{u}}\left(M\right)=M’$

Exemple



translation de vecteur $\overrightarrow{u}$

Remarques

$t_{\overrightarrow{u}}\left(M\right)=M’$ équivaut à le quadrilatère $ABM’M$ est parallélogramme (avec $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$)

$t_{\overrightarrow{u}}\left(M\right)=M’$ équivaut à $\overrightarrow{MM’}=\overrightarrow{u}$
$t_{\overrightarrow{u}}\left(M\right)=M’$ équivaut à $t_{-\overrightarrow{u}}\left(M’\right)=M$
Si $\overrightarrow{u}\neq\overrightarrow{0}$ aucun point de $\left(P\right)$ est invariant.

Tous les points du plan sont invariant par la translation de vecteur nul $\left(\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}\right)$

V- Homothétie

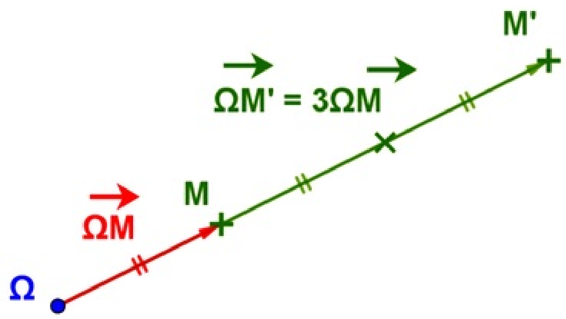
Définition

L'homothétie de centre un point Ω donné du plan (P) et de rapport k est la transformation qui transforme tout point M de (P) au point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$.

On note l'homothétie par $h\left(\Omega,k\right)$

On écrit : $h\left(M\right)=M'$

Exemple



homothétie de centre Ω et de rapport k = 3

Remarques

Si $h\left(M\right)=M'$, ona M et M' et Ω sont alignés.

Si $k=0$, on a $h\left(M\right)=\Omega$ (tous les points ont pour image Ω - l'homothétie n'est pas intéressante).

Si $k=1$, on a $h\left(M\right)=M$ (tous les points sont invariants - l'homothétie n'est pas intéressante).

Pour cela on prend $k\in\mathbb{R}\backslash\left\{0,1\right\}$

Si $k=-1$, on a $h\left(M\right)=M'$' avec Ω est le milieu de $[MM']$, l'homothétie h est la symétrie centrale S_{Ω}, ou encore $h\left(\Omega,-1\right)=S_{\Omega}$.

Si $k>0$, on a $h\left(M\right)=M'$' avec $M'\in[\Omega M)$.

Si $k<0$, on a $h\left(M\right)=M'$' avec M' appartienne à la demi droite opposée à $[\Omega M)$.

VI- Propriétés caractéristiques de $t_{\overrightarrow{u}},\ h\left(\Omega,k\right)$

6-1/ Propriétés

Soit f une transformation dans le plan (P) tel que pour tous points A et B de (P) on a $f\left(A\right)=A'$ et $f\left(B\right)=B'$.

- La transformation f est une translation si et seulement si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.

- La transformation f est une homothétie si et seulement si $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ et $k \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$

VI- Propriétés caractéristiques de $t_{\overrightarrow{u}}$, S_{Ω} et $h(\Omega, k)$

6-2/ Les images de certaines figures géométriques par les transformations

Soient A et B deux points du plan (P) et A' et B' leurs images par l'une des transformations suivantes : symétrie axiale S_D ou symétrie centrale S_{Ω} ou translation $t_{\overrightarrow{u}}$ ou homothétie $h(\Omega, k)$.

1- L'mage de la droite (AB) par les transformations précédentes est la droite $(A'B')$, et $(AB)//(A'B')$.

2- L'mage du segment $[AB]$ par les transformations précédentes est le segment $[A'B']$, et $A'B' = AB$, sauf l'homothétie $(A'B' = k.AB)$.

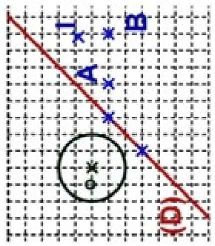
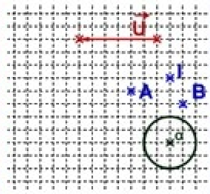
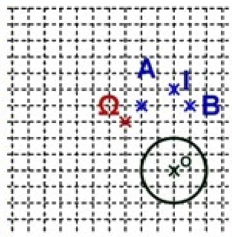
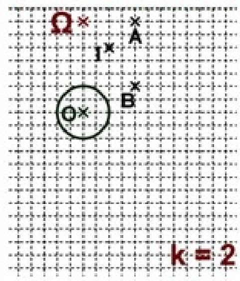
3- L'mage du vecteur $\alpha\overrightarrow{AB}$ par les transformations précédentes est le vecteur $\alpha\overrightarrow{A'B'}$, sauf l'homothétie $\left(k\alpha\overrightarrow{A'B'}\right)$.

4- L'mage du cercle $\mathscr{C}(A, r)$ par les transformations précédentes est le cercle $\mathscr{C}'(A', r)$, sauf l'homothétie (le cercle $\mathscr{C}''(A', |k| \times r)$).

5- L'mage de l'angle géométrique AOB par les transformations précédentes est l'angle géométrique $A'O'B'$ de mêmes mesure .

6- Les transformations précédentes conservent les distance (sauf l'homothétie), et le milieu, et les mesures des angles géométriques, et le coefficient de colinéarité, et le parallélisme, et l'orthogonalité, et l'intersection des figures.

6-3/ Tableau récapitulatif

transformation f →	S_D	$t_{\vec{u}}$	S_Ω	$h_{(\Omega\ ,\ k=2)}$
Figures → Construire les images des figures ↓				
	Images par S_D ↓	Images par $t_{\vec{u}}$ ↓	Images par S_Ω ↓	Images par $h_{(\Omega\ ,\ k=2)}$ ↓
La droite (AB)				
Le segment $[AB]$				
Le cercle $C(O,2)$				
Angle géométrique $[AIB]$				
Le vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$				
transformation f → conserve (oui ou non) ↓	S_D	$t_{\vec{u}}$	S_Ω	$h_{(\Omega\ ,\ k=2)}$
Les distances				
Le milieu				
Coefficient de colinéarité				
parallélisme				
orthogonalité				
Mesures des angles géométriques				
Intersection des figures				

VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan.

$ABCD$ est un quadrilatère du plan tel que B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et D est l'image de C par la translation de vecteur $2\overrightarrow{u}$.

1. Montrer que : $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

Soit I le milieu du segment $[CD]$.

2. Monter que $ABIC$ est un parallélogramme.

ABC est un triangle.

Pour tout point M du plan on considère le M' tel que
$\overrightarrow{MM'} - 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

3. Montrer que M' est l'image de M par une translation de vecteur à préciser.

7-2/ Exercice 2

1. Exprimer vectoriellement la proposition suivante : B est l'image de C par l'homothétie h de centre A et de rapport $k = -\frac{3}{2}$.
2. Exprimer la relation vectorielle $\overrightarrow{JK} = \frac{5}{4}\overrightarrow{JL}$ par une homothétie.
3. Déterminer le centre et le rapport de l'homothétie h' qui transforme A en B dans les cas suivants :

$$1 \ \ 2\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$$
$$2 \ \ \overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

Soient A et B deux points du plan (P).

Soit T la transformation plane qui à tout point M associe le point M' tel que
$\overrightarrow{MM'} = 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$.

4. Montrer que T a un unique point invariant I $(T(I) = I)$.
5. Exprimer $\overrightarrow{IM'}$ en fonction de $\overrightarrow{IM}$.
6. En déduire la nature de la transformation T.

7-3/ Exercice 3

$OABC$ est un rectangle.

On considère t la translation de vecteur $2\overrightarrow{OA}$.

Soient O', A', B' et C' les images respectives de O, A, B et C par t.

1. Montrer que $O'A'B'C'$ est un rectangle.

On considère les points M et N du plan définis par $\overrightarrow{OM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA}$ et
$\overrightarrow{O'N} = \frac{2}{5}\overrightarrow{O'A'}$

2. Montrer que $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{C'N}$.

7-4/ Exercice 4

$ABCD$ est un parallélogramme et I et J sont deux points du plan tels que
$\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$.

1. Construire une figure convenable.
2. Montrer que la droite (BJ) est l'image de la droite (AI) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Soit h l'homothétie de centre I et qui transforme B en C.

3. Montrer que le rapport de h est $k = -2$.

Soit K l'image de J par h.

4. Montrer que $\overrightarrow{KI} = 2\overrightarrow{AB}$