



Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 8 (Les limites d'une fonction numérique)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Limite infinie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

II- Limite finie d'une fonction en $+\infty$ et en $-\infty$

III- Limite finie et limite infinie d'une fonction en un point

3-1/ Limite finie d'une fonction en un point

3-2/ Limite infinie d'une fonction en un point

IV- Limite à droite et limite à gauche d'une fonction en un point

V- Opérations sur les limites

5-1/ Limite d'une somme

5-2/ Limite d'un produit

5-3/ Limite de l'inverse

5-4/ Limite d'un quotient

VI- Limites de fonctions particulières

6-1/ Limite d'une fonction polynôme - Limite d'une fonction rationnelle

6-2/ Limites des fonctions irrationnelles

6-3/ Limites des fonctions trigonométriques

VII- Théorème de comparaison

IIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

8-2/ Exercice 2

8-3/ Exercice 3

8-4/ Exercice 4

8-5/ Exercice 5

8-6/ Exercice 6

I- Limite infinie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

Activité

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = x^2$

1. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

2. Compléter le tableau suivant :

x	-10^{20}	-10^{10}	-10	10	10^{10}	10^{20}
$f(x)$						

3. Que remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs positives de plus en plus grands (c-à-d quand x tend vers $+\infty$).
4. Que remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs négatives de plus en plus (c-à-d quand x tend vers $-\infty$).
5. Conjecturer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$

Remarque

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme :

$$[a, +\infty[\quad (a \in \mathbb{R})$$

Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou

$$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$$

On peut exprimer aussi par des phrases les symboles suivantes :

$$\begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ & \bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \end{cases} \quad (\text{Il faut que }]-\infty, a] \in D_f). \end{aligned}$$

Limites usuelles

On admet les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est paire} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impaire} \end{cases}$$

II- Limite finie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

Activité

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x^2}$

1. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé

$$(O; \vec{i}; \vec{j})$$

2. Compléter le tableau suivant :

x	-10^6	-10^4	-10	10	10^4	10^6
$f(x)$						

3. Que remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs positives de plus en plus grands (c-à-d quand x tend vers $+\infty$).
4. Que remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs négatives de plus en plus (c-à-d quand x tend vers $-\infty$).
5. Conjecturer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3}$

Remarque

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme :

$[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$), et soit $l \in \mathbb{R}$

Si $f(x)$ tend vers le nombre l quand x tend vers $+\infty$, on écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

ou $\lim_{+\infty} f(x) = l$

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme :

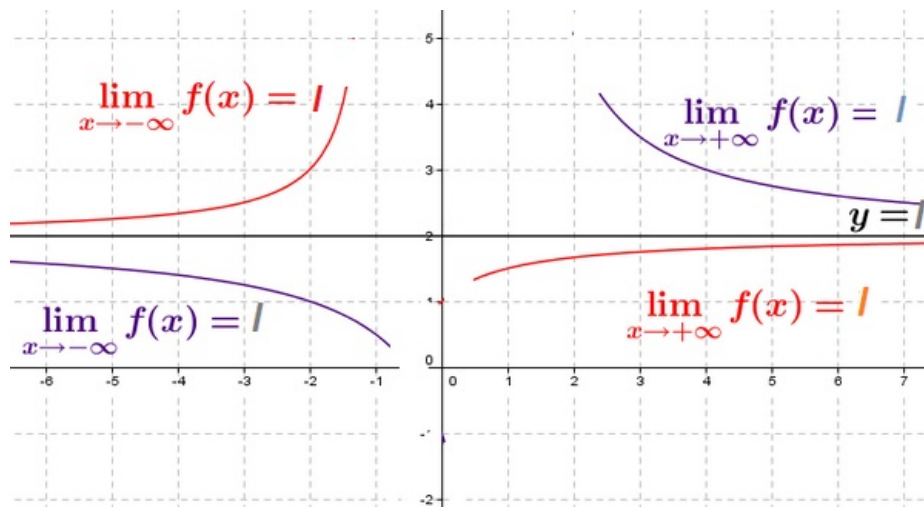
$]-\infty, b[$ ($b \in \mathbb{R}$), et soit $l' \in \mathbb{R}$

Si $f(x)$ tend vers le nombre l' quand x tend vers $-\infty$, on écrit :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l'$ ou $\lim_{-\infty} f(x) = l'$

Interprétation géométrique

La courbe (C_f) se rapproche de la droite d'équation $y = l$ au voisinage de ∞ .



Propriété 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{En général : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\text{On a aussi : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Propriété 2

Soit f une fonction numérique et $l \in \mathbb{R}$.

- Si f admet en $+\infty$ (ou en $-\infty$) une limite, alors cette limite est unique.

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - l = 0$$

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - l = 0$$

III- Limite finie et limite infinie d'une fonction en un point

3-1/ Limite finie d'une fonction en un point

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a - r; a + r[$ où $r > 0$, ou sur un intervalle de la forme $I =]a - r; a + r[- \{a\}$.

Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a alors on note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Soit f une fonction numérique et $l \in \mathbb{R}$.

- Si f admet en $+\infty$ (ou en $-\infty$) une limite, alors cette limite est unique.

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - l = 0$$

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - l = 0$$

Propriété

Si f admet une limite finie l en a alors cette limite est unique.

3-2/ Limite infinie d'une fonction en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a - r; a + r[- \{a\}$.

Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a alors on note : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

On définit de la même façon : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

Exercice

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x^2 - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{4x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

III- Limite IV- Limite à droite et limite à gauche d'une fonction en un point et limite infinie d'une fonction en un point

Activité

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{|x-1|(x+2)}{x-1}$

1. Déterminer D_f .
2. Construire la courbe (C_f) de la fonction f .
3. À partir de la représentation graphique, que remarque-t-on pour les valeurs de $f(x)$ quand x tend vers 1 et $x > 1$?
4. Que remarque-t-on pour les valeurs de $f(x)$ quand x tend vers 1 et $x < 1$?

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle de centre a , on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

V- Opérations sur les limites

5-1/ Limite d'une somme

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

5-2/ Limite d'un produit

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)]$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.

Il s'agit de la règle des signes

5-3/ Limite de l'inverse

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	0 et $f(x) > 0$	0 et $f(x) < 0$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

5-4/ Limite d'un quotient

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	$l \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I.	F.I.

Il faut étudier le signe de g règle des signes

VI- Limites de fonctions particulières

6-1/ Limite d'une fonction polynôme - Limite d'une fonction rationnelle

Propriété

Soient P et Q deux fonctions polynômes et $a \in \mathbb{R}$, alors on a :

- $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$

- Si $Q(a) \neq 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$

- Si ax^n et bx^m sont des termes de plus haut degré de P et Q respectivement ($a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$), alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$$

6-2/ Limites des fonctions irrationnelles

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, avec $(\forall x \in [a, +\infty[) f(x) \geq 0$

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $l \geq 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

6-3/ Limites des fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \\ (\forall a \in \mathbb{R}) \lim_{x \rightarrow a} \cos(x) &= \cos(a) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a) \\ (\forall a \in \mathbb{R} - \{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \}) \lim_{x \rightarrow a} \tan(x) &= \tan(a) \\ (\forall a \in \mathbb{R}^*) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} &= a \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a \end{aligned}$$

VII- Théorème de comparaison

Théorème

Soit I un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ et $l \in \mathbb{R}$ et soient f, u et v des fonctions définies sur I :

$$\begin{aligned} 1 \quad & \begin{cases} (\forall x \in I) f(x) \geq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ 2 \quad & \begin{cases} (\forall x \in I) f(x) \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \\ 3 \quad & \begin{cases} (\forall x \in I) u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \\ 4 \quad & \begin{cases} (\forall x \in I) |f(x) - l| \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \end{aligned}$$

IIIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

1. Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} 1 \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = \\ 2 \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = \\ 3 \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = \\ 4 \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = \\ 5 \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{200} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{201} = \\ 9 \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = \\ 10 \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = \\ 11 \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = \\ 12 \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = \end{aligned}$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{200} =$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{201} =$$

$$13 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} =$$

$$14 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} =$$

8-2/ Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$

1. Déterminer D_f .
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f .

Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} ; x > 0 \\ g(x) = x^2 ; x \leq 0 \end{cases}$

4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$
5. Est que la fonction g admet une limite en 0 ?

8-3/ Exercice 3

1. Calculer les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x\sqrt{x+1} =$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} - 2\sqrt{x-1} =$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x =$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x =$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} =$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} \sqrt{4x^2 + 1} =$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - 2x =$$

$$8 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} - x =$$

8-4/ Exercice 4

1. Calculer les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} =$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{3x} =$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(x)} =$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan^2(x)+1} =$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan(x)} =$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(3x)} =$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} =$$

$$8 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x) \cdot \tan(x)}{1-\cos(x)} =$$

$$9 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$10 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} =$$

$$11 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin(x)) \tan(x) =$$

$$12 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) =$$

$$13 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(6x) - \sqrt{3} \sin(x)}{6x - \pi} =$$

$$14 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos(x)}{1 - \sin(x)} =$$

8-5/ Exercice 5

1. Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} 1 \quad & \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 3 = \\ 2 \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 + 2x + 3} = \\ 3 \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 + 2x + 3} = \\ 4 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \\ 5 \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \\ 6 \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \\ 7 \quad & \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2 - x|}{x^2 - 4} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \quad & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x} = \\ 9 \quad & \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 2x^2 + 2x}{x + 1} = \\ 10 \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} = \\ 11 \quad & \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x + 12} - 3}{x^2 - 9} = \\ 12 \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3} = \\ 13 \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} = \\ 14 \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - x}{(x - 3)^2} = \end{aligned}$$

8-6/ Exercice 6

1. Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} 1 \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 5}{x - 3} = \\ 2 \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + x + 1}{5x^4 + x - 8} = \\ 3 \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 4x + 3}{x^2 + x + 1} = \\ 4 \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x + 3} = \\ 5 \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2}{x - 6} = \\ 6 \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \end{aligned}$$