AlloSchool

Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 8 (Les limites d'une fonction numérique)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Limite infinie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

Activité

Considérons la fonction f définie par : $f\left(x\right) = x^2$

1. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\right)$
2. Compléter le tableau suivant :

x	-10^{20}	-10^{10}	-10	10	10^{10}	10^{20}
$f\left(x\right)$						

3. Que remarquer pour les valeurs de $f\left(x\right)$ quand x prend des valeurs positives de plus en plus grands (c-à-d quand x tend vers $+\infty$).
4. Que remarquer pour les valeurs de $f\left(x\right)$ quand x prend des valeurs négatives de plus en plus (c-à-d quand x tend vers $-\infty$).
5. Conjecturer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$

Remarque

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme : $\left[a, +\infty\right[\ \left(a \in \mathbb{R}\right)$

Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f\left(x\right) = +\infty$

On peut exprimer aussi par des phrases les symboles suivantes :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = -\infty$
- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = -\infty \end{cases}$ (Il faut que $\left]-\infty, a\right] \in D_f$).

Limites usuelles

On admet les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty\ \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \ si \ n \ est \ paire \\ -\infty \ si \ n \ est \ impaire \end{cases}$

II- Limite finie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

Activité

Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x^2}$

1. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$
2. Compléter le tableau suivant :

x	-10^6	-10^4	-10	10	10^4	10^6
$f(x)$						

3. Que remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs positives de plus en plus grands (c-à-d quand x tend vers $+\infty$).
4. Que remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs négatives de plus en plus (c-à-d quand x tend vers $-\infty$).
5. Conjecturer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}$

Remarque

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme : $[a, +\infty[\ (a \in \mathbb{R})$, et soit $l \in \mathbb{R}$

Si $f(x)$ tend vers le nombre l quand x tend vers $+\infty$, on écrit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = l$ ou $\lim\limits_{+\infty} f\left(x\right) = l$

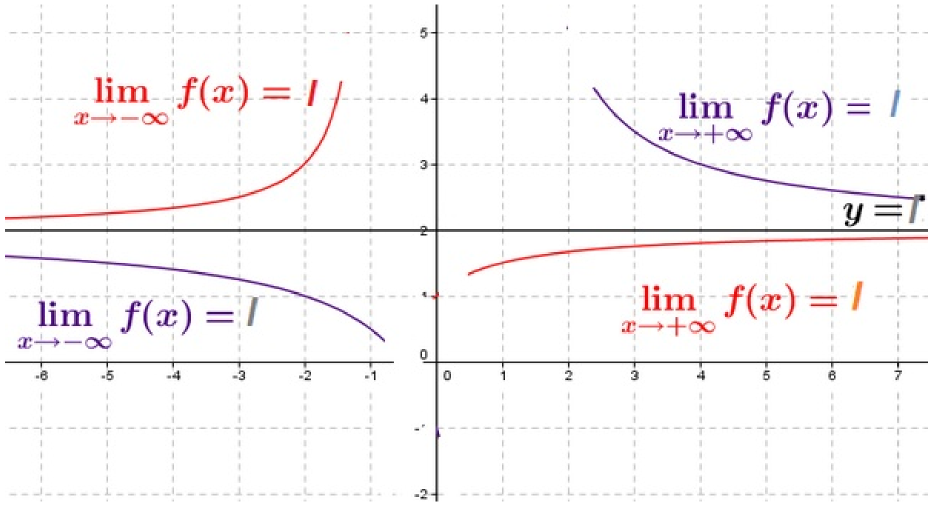
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme : $[-\infty, b[\ (b \in \mathbb{R})$, et soit $l' \in \mathbb{R}$

Si $f(x)$ tend vers le nombre l' quand x tend vers $-\infty$, on écrit :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = l'$ ou $\lim\limits_{-\infty} f\left(x\right) = l'$

Interprétation géométrique

La courbe $\left(C_f\right)$ se rapproche de la droite d'équation $y = l$ au voisinage de ∞.



Propriété 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

En général : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

On a aussi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Propriété 2

Soit f une fonction numérique et $l \in \mathbb{R}$.

- Si f admet en $+\infty$ (ou en $-\infty$) une limite, alors cette limite est unique.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) - l = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right) - l = 0$

III- Limite finie et limite infinie d'une fonction en un point

3-1/ Limite finie d'une fonction en un point

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a-r; a+r[$ où $r > 0$, ou sur un intervalle de la forme $I =]a-r; a+r[- \{a\}$.

Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a alors on note : $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) = l$

Soit f une fonction numérique et $l \in \mathbb{R}$.

- Si f admet en $+\infty$ (ou en $-\infty$) une limite, alors cette limite est unique.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right) - l = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right) - l = 0$

Propriété

Si f admet une limite finie l en a alors cette limite est unique.

3-2/ Limite infinie d'une fonction en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a-r; a+r[- \{a\}$.
Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a alors on note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

On définie de la même façon : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Exercice

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 1} 2x^2 - 3$$
$$\lim_{x \to 2} 2x^2 - 3$$
$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2+1}{4x-2}$$
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

III- Limite IV- Limite à droite et limite à gauche d'une fonction en un pointet limite infinie d'une fonction en un point

Activité

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{|x-1|(x+2)}{x-1}$

1. Déterminer D_f.
2. Construire la courbe $\left(C_f\right)$ de la fonction f.
3. À partir de la représentation graphique, que-remarque-t-on pour les valeurs de $f(x)$ quand x tend vers 1 et $x > 1$
4. Que-remarque-t-on pour les valeurs de $f(x)$ quand x tend vers 1 et $x < 1$

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle de centre a, on a :

$$\lim_{x \to a} f\left(x\right) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f\left(x\right) = \lim_{x \to a^-} f\left(x\right) = l$$
$$\lim_{x \to a} f\left(x\right) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f\left(x\right) = \lim_{x \to a^-} f\left(x\right) = +\infty$$
$$\lim_{x \to a} f\left(x\right) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f\left(x\right) = \lim_{x \to a^-} f\left(x\right) = -\infty$$

V- Opérations sur les limites

5-1/ Limite d’une somme

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

5-2/ Limite d’un produit

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} [f(x)\times g(x)]$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.
		Il s’agit de la règle des signes								

5-3/ Limite de l’inverse

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	0 et $f(x)>0$	0 et $f(x)<0$
$\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

5-4/ Limite d’un quotient

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	$l\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	$l'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I.	F.I.
			Il faut étudier le signe de g		règle des signes		

VI- Limites de fonctions particulières

6-1/ Limite d’une fonction polynôme - Limite d’une fonction rationnelle

Propriété

Soient P et Q deux fonctions polynômes et $a \in \mathbb{R}$, alors on a :

- $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$

- Si $Q(a) \neq 0$, alors : $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$

- Si ax^n et bx^m sont des termes de plus haut degré de P et Q respectivement ($a, b \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$), alors :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} ax^n \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$$

6-2/ Limites des fonctions irrationnelles

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$, avec $(\forall x \in [a,+\infty[)\ f(x) \geq 0$

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $l \geq 0$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

6-3/ Limites des fonctions trigonométriques

$$\lim_{x\to0} \tfrac{\sin x}{x} = 1\ ;\ \lim_{x\to0} \tfrac{\tan x}{x} = 1\ ;\ \lim_{x\to0} \tfrac{1-\cos x}{x^2} = \tfrac{1}{2}$$

$$(\forall a \in \mathbb{R})\ \lim_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)\ et\ \lim_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$$

$$\left(\forall a \in \mathbb{R} - \left\{\tfrac{\pi}{2} + k\pi / \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}\right)\ \lim_{x\to a} \tan(x) = \tan(a)$$

$$(\forall a \in \mathbb{R}^*)\ \lim_{x\to0} \frac{\sin(ax)}{x} = a\ et\ \lim_{x\to0} \frac{t\,\mathrm{an}(ax)}{x} = a$$

VII- Théorème de comparaison

Théorème

Soit I un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ et $l \in \mathbb{R}$ et soient f, u et v des fonctions définies sur I :

$$1\ \begin{cases} (\forall x \in I)\ f(x) \geq u(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$2\ \begin{cases} (\forall x \in I)\ f(x) \leq u(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$3\ \begin{cases} (\forall x \in I)\ u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

$$4\ \begin{cases} (\forall x \in I)\ |f(x) - l| \leq u(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

IIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

1. Déterminer les limites suivantes :

$1\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^4 =$	$8\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^{201} =$
$2\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 =$	$9\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3} =$
$3\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^5 =$	$10\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} =$
$4\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^5 =$	$11\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^4} =$
$5\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^{200} =$	$12\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} =$

$6 \lim\limits_{x\to+\infty} x^{200} =$	$13 \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$
$7 \lim\limits_{x\to-\infty} x^{201} =$	$14 \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} =$

8-2/ Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f\left(x\right) = \frac{2x-1}{x-1}$

1. Déterminer D_f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

Soit g la fonction définie par : $\begin{cases} g\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ ; \ x > 0 \\ g\left(x\right) = x^2 \ ; \ x \leq 0 \end{cases}$

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} g\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} g\left(x\right)$
5. Est que la fonction g admet une limite en 0 ?

8-3/ Exercice 3

1. Calculer les limites suivantes :

$1 \lim\limits_{x\to+\infty} -3x\sqrt{x+1} =$	$5 \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x} =$
$2 \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x+1} - 2\sqrt{x-1} =$	$6 \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{4x^2+1} =$
$3 \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1} - x =$	$7 \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - 2x =$
$4 \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + x =$	$8 \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x} - x =$

8-4/ Exercice 4

1. Calculer les limites suivantes :

$1 \lim\limits_{x\to0} = \frac{\sin(5x)}{x} =$	$8 \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(6x).\tan(x)}{1-\cos(x)} =$
$2 \lim\limits_{x\to0} = \frac{\tan(x)}{3x} =$	$9 \lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) =$
$3 \lim\limits_{x\to0} = \frac{\sin(5x)}{\sin(x)} =$	$10 \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} =$
$4 \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\tan^2(x)+1} =$	$11 \lim\limits_{x\to0} \left(1-\sin\left(x\right)\right)\tan\left(x\right) =$
$5 \lim\limits_{x\to0} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan(x)} =$	$12 \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan\left(x\right) =$
$6 \lim\limits_{x\to0} = \frac{\sin(x)}{\cos(3x)} =$	$13 \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos(6x)-\sqrt{3}\sin(x)}{6x-\pi} =$
$7 \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} = \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} =$	$14 \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)} =$

8-5/ Exercice 5

1. Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x\to 2} x^2+2x+3=$	8 $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2+x}=$
2 $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2+2x+3}=$	9 $\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3+2x^2+2x}{x+1}=$
3 $\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2+2x+3}=$	10 $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-2x^3+x^2+x-1}{x^2+x-2}=$
4 $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x+1}{x+1}=$	11 $\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x+12}-3}{x^2-9}=$
5 $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}=$	12 $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=$
6 $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x-3}=$	13 $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-3x+2}=$
7 $\lim_{x\to 2^+} \frac{\lvert 2-x\rvert}{x^2-4}=$	14 $\lim_{x\to 3} \frac{2-x}{(x-3)^2}=$

8-6/ Exercice 6

1. Calculer les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+x-5}{x-3}=$$

$$2 \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x^2+x+1}{5x^4+x-8}=$$

$$3 \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-4x+3}{x^2+x+1}=$$

$$4 \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{x+3}=$$

$$5 \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1-x^2}{x-6}=$$

$$6 \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=$$