



Mathématiques : Tronc Commun

Séance 11 (Généralités sur les fonctions)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Généralités sur les fonctions numériques

1-1/ Fonction numérique d'une variable numérique

1-2/ Représentation graphique (ou courbe représentative) d'une fonction numérique

1-3/ Égalité de deux fonctions

II- Fonction paire – fonction impaire

2-1/ Fonction paire

2-2/ Fonction impaire

III- Sens de variation d'une fonction

IV- Taux d'accroissement d'une fonction

V- Extremums d'une fonction

VI- Étude de certaines fonctions

6-1/ Fonction $f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$)

6-2/ Fonction $f(x) = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)

6-3/ Fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

6-4/ Fonction $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad - bc \neq 0$)

VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

7-2/ Exercice 2

7-3/ Exercice 3

7-4/ Exercice 4

I- Généralités sur les fonctions numériques

1-1/ Fonction numérique d'une variable numérique

Vocabulaire

La relation qui nous permet de lier chaque élément $x \in \mathbb{R}$ par un seul élément $y \in \mathbb{R}$ est appelée fonction numérique de la variable réelle x définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

On la note par f ou g ou h ...

- $y = f(x)$ est l'image de x par f .
- x est un antécédent de y par f .

Si l'image de x existe, on dit que la fonction f est définie en x .

Tous les réels x qui ont des images par la fonction f constituent un ensemble appelé ensemble de définition ou domaine de définition, on le note par D ou D_f .

1-2/ Représentation graphique (ou courbe représentative) d'une fonction numérique

Définition

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f ($D_f \subset \mathbb{R}$)

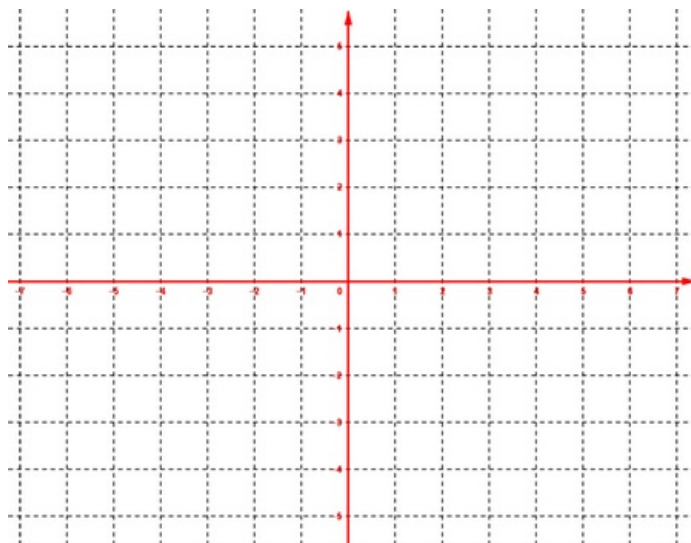
Le plan (P) est rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On appelle courbe représentative de la fonction f , notée (C_f) ou \mathcal{C}_f , l'ensemble des points M de (P)

de coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in D_f$.

Un point $M(x, y) \in (C_f)$ équivaut à $x \in D_f$ et $y = f(x)$.

La relation $y = f(x)$ s'appelle équation cartésienne de la courbe (C_f) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .



1-3/ Égalité de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g .

On dit que les deux fonctions f et g sont égales si et seulement si :

- $D_f = D_g$
- Pour tout x de D_f on a : $f(x) = g(x)$

Dans ce cas on écrit : $f = g$

Remarque

Si $f = g$, alors les courbes (C_f) et (C_g) de f et g sont confondues.

II- Fonction paire – fonction impaire

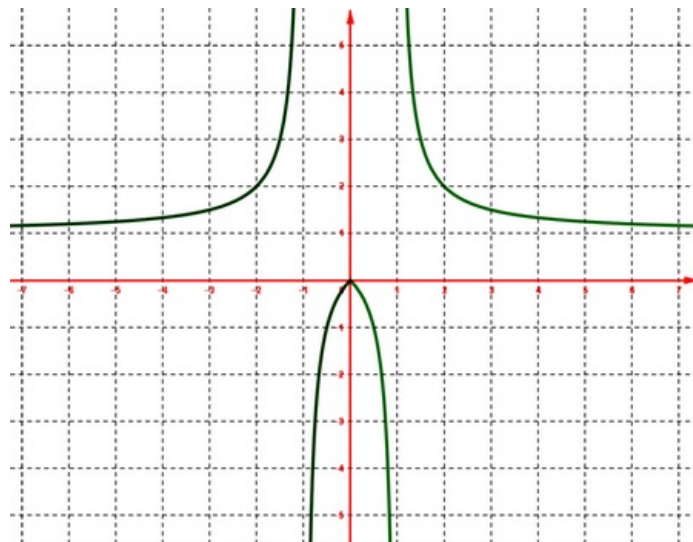
2-1/ Fonction paire

Définition

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f .

On dit que f est une fonction paire sur D_f si et seulement si pour tout x de D_f on a :

- $-x$ est aussi un élément de D_f .
- $f(-x) = f(x)$ (c.à.d. $-x$ et x ont la même image).



Remarque

La courbe d'une fonction f paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Si la fonction f est paire sur D_f , il suffit de connaître la partie de la courbe (C_f) tel que les abscisses sont positives, ces abscisses constituent une partie de \mathbb{R}^+ appelée domaine d'étude de la fonction f , notée D_E .

On a : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$

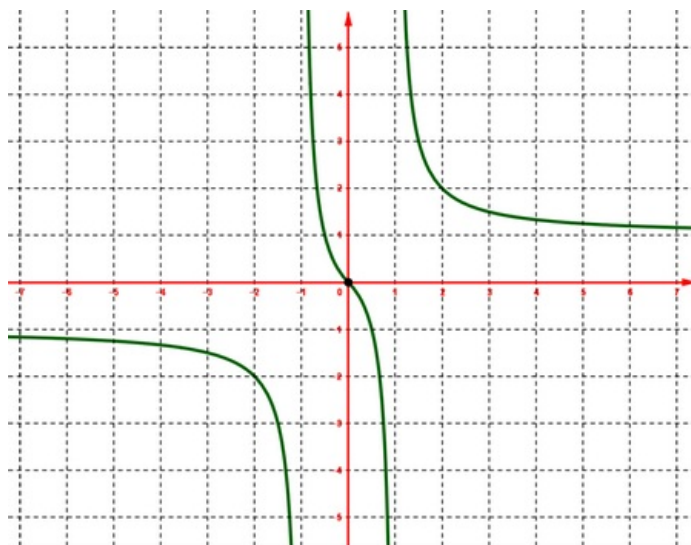
2-2/ Fonction impaire

Définition

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f .

On dit que f est une fonction impaire sur D_f si et seulement si pour tout x de D_f on a :

- $-x$ est aussi un élément de D_f .
- $f(-x) = -f(x)$ (c.à.d. $-x$ et x ont des images opposées)



Remarque

La courbe d'une fonction f impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Si la fonction f est impaire sur D_f , il suffit de connaître la partie de la courbe (C_f) tel que les abscisses sont positives, ces abscisses constituent une partie de \mathbb{R}^+ appelée domaine d'étude de la fonction f , notée D_E .

On a : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$

III- Sens de variation d'une fonction

Définitions

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f .

I est un intervalle inclus dans D_f .

On dit que f est une fonction croissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tous x et x' de I on a $x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$ (le sens de l'inégalité ne change pas).

On dit que f est une fonction strictement croissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tous x et x' de I on a $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ (le sens de l'inégalité ne change pas).

On dit que f est une fonction décroissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tous x et x' de I on a $x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$ (le sens de l'inégalité change).

On dit que f est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tous x et x' de I on a $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$ (le sens de l'inégalité change).

On dit que f est une fonction constante sur l'intervalle I si et seulement si pour tous x et x' de I on a $f(x) = f(x')$.

Remarque

Si la fonction f est croissante ou bien décroissante sur l'intervalle I , on dit que f est monotone sur I .

Si la fonction f est strictement croissante ou bien strictement décroissante sur l'intervalle I , on dit que f est strictement monotone sur I .

Déterminer les variations d'une fonction c'est de rechercher les intervalles sur lesquelles la fonction f est strictement monotone ou constante.

On résume l'ensemble de définition de la fonction f et les variations de la fonction f par un tableau appelé tableau de variation de f .

Ensemble de définition →	x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f →	$f(x)$	\nearrow	

IV- Taux d'accroissement d'une fonction

Définition

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f .

I est un intervalle inclus dans D_f .

Soient x et x' de I tel que $x \neq x'$, le nombre $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ est appelé le taux d'accroissement de la fonction f entre x et x' , on note T_f , d'où $T_f = \frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$

Propriété

T_f est le taux d'accroissement de la fonction f sur un intervalle I .

- Si $T_f > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle I .
- Si $T_f < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle I .
- Si $T_f = 0$ alors la fonction f est constante sur l'intervalle I .

V- Extremums d'une fonction

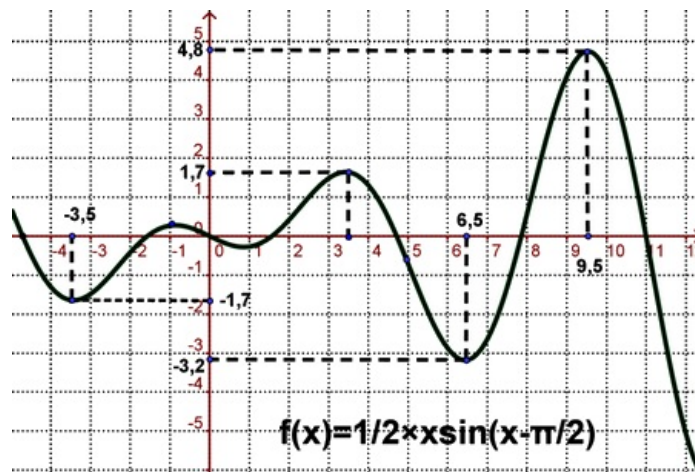
Définition

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f .

I est un intervalle inclus dans D_f , et $a \in I$.

$f(a)$ est une valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle I équivaut à $f(x) \leq f(a)$.

$f(a)$ est une valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle I équivaut à $f(x) \geq f(a)$.

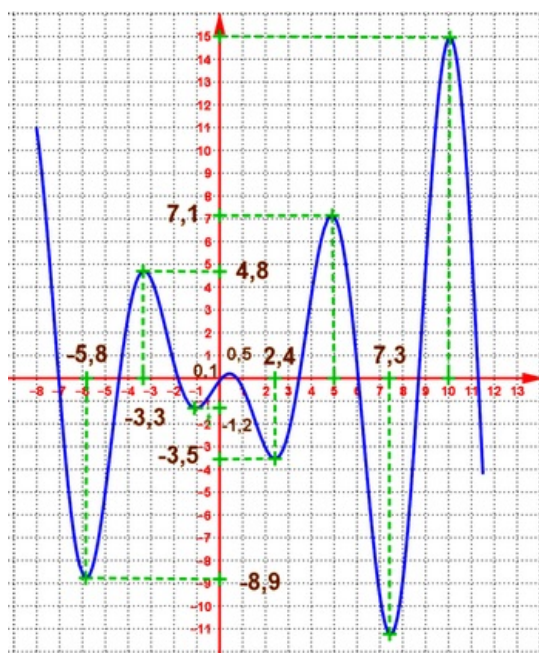


Remarque

$f(a)$ est un extremum de la fonction f signifie que $f(a)$ est une valeur maximale ou bien est une valeur minimale de f .

Si $f(a)$ est une valeur maximale de la fonction f sur D_f on dit que $f(a)$ est une valeur maximale absolue de f (sinon on dit que $f(a)$ est une valeur maximale relative).

Si $f(a)$ est une valeur minimale de la fonction f sur D_f on dit que $f(a)$ est une valeur minimale absolue de f (sinon on dit que $f(a)$ est une valeur minimale relative).



VI- Étude de certaines fonctions

6-1/ Fonction $f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$)

Propriété

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = ax^2$ ($a \neq 0$)

La fonction f est paire sur $D_f = \mathbb{R}$.

1er cas : $a > 0$

2ème cas : $a < 0$

Monotonie de la fonction f

La fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$

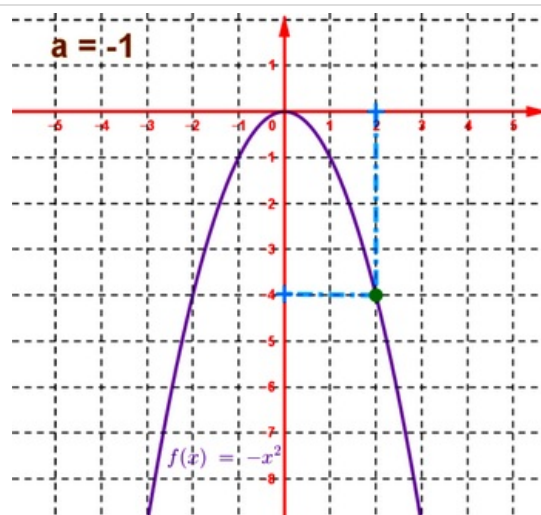
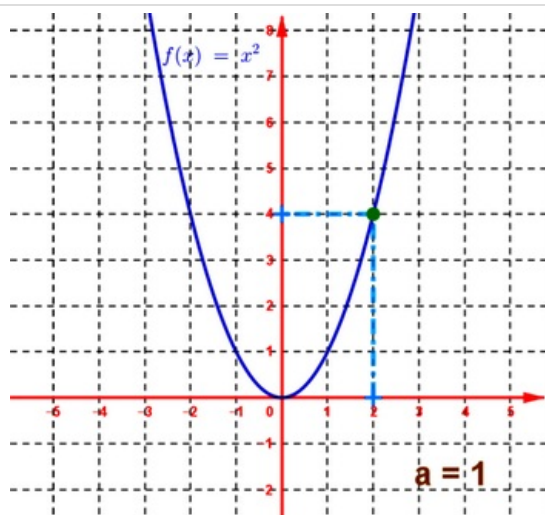
La fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante sur $] -\infty, 0]$

Tableau de variation de la fonction f

$a > 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f		0	

$a < 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f		0	

Courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})



La courbe représentative de la fonction f est appelée parabole, de sommet l'origine O du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , d'axe de symétrie l'axe des ordonnées (la droite d'équation $x = 0$).

6-2/ Fonction $f(x) = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)

La fonction f est impaire sur $D_f = \mathbb{R}^*$.

1er cas : $a > 0$

2ème cas : $a < 0$

Monotonie de la fonction f

La fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$

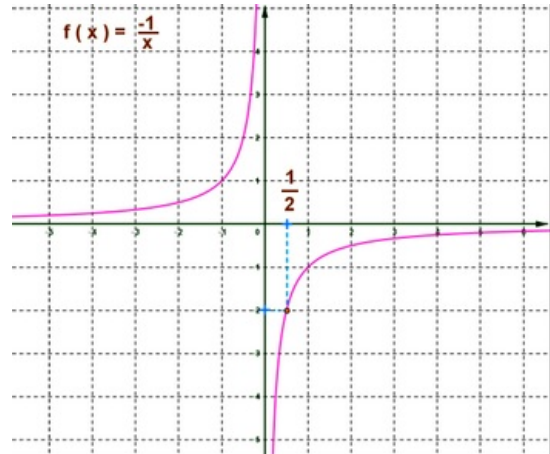
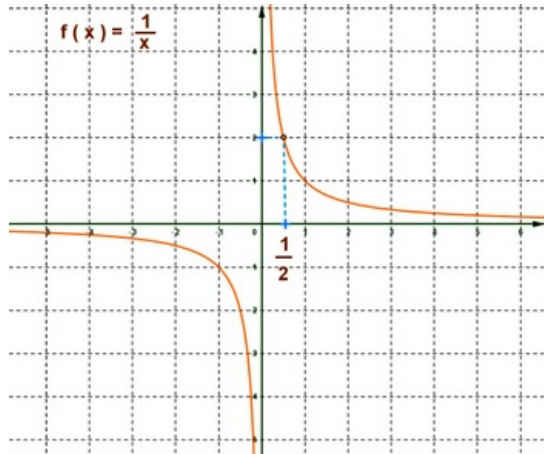
La fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante sur $] -\infty, 0]$

Tableau de variation de la fonction f

$\Delta > 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f	\searrow	\parallel	\searrow

$\Delta < 0$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
	f	\nearrow	\parallel	\nearrow

Courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé
 (O, \vec{i}, \vec{j})



La courbe représentative de la fonction f est appelée hyperbole de centre de symétrie l'origine O , d'asymptote horizontale l'axe des abscisses (la droite d'équation $y = 0$), et d'asymptote verticale l'axe des ordonnées (la droite d'équation $x = 0$).

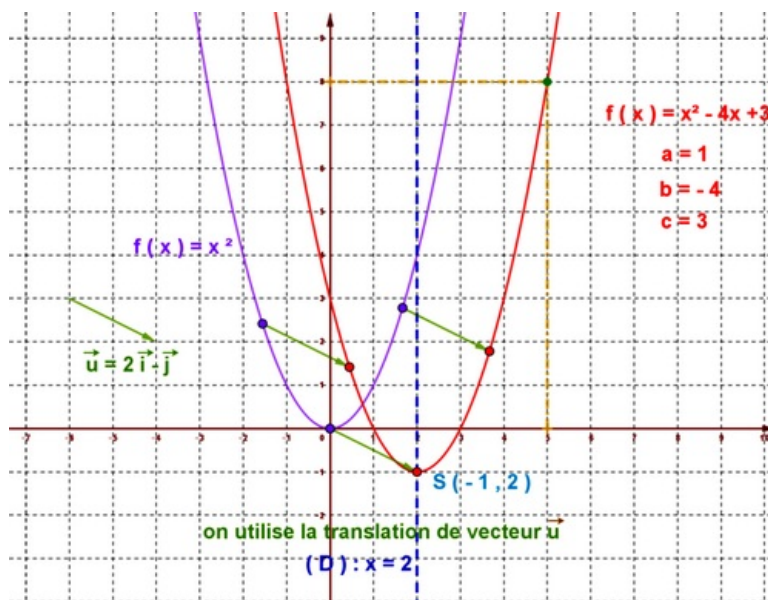
6-3/ Fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par
 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

La fonction f s'écrit de la forme $f(x) = a(x + \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

La courbe représentative de la fonction f est une parabole, de sommet le point $S(-\alpha, \beta)$, d'axe de symétrie la droite d'équation $x = -\alpha$.

La courbe représentative de la fonction f est obtenue en utilisant la translation du vecteur $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ de la courbe $f(x) = ax^2$.



6-4/ Fonction $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad - bc \neq 0$)

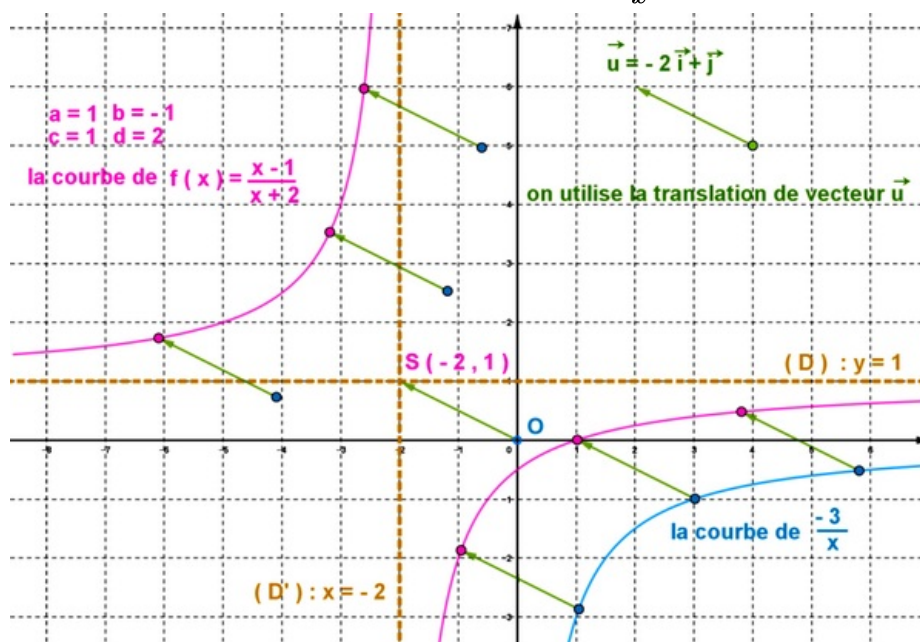
Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0)$$

La fonction f s'écrit de la forme $f(x) = \beta + \frac{k}{x+\alpha}$ avec $k, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x \neq -\alpha$

La courbe représentative de la fonction f est une hyperbole, de centre de symétrie le point $S(-\alpha, \beta)$, d'asymptote horizontale la droite d'équation $y = \beta$, et d'asymptote verticale la droite d'équation $x = -\alpha$.

La courbe représentative de la fonction f est obtenue en utilisant la translation du vecteur $\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ de la courbe $f(x) = \frac{k}{x}$.



VII- Exercices

7-1/ Exercice 1

Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = 2x^2 - 3$

- Déterminer les images des nombres suivants 1 ; -1 ; $\frac{1}{2}$; $\sqrt{5}$; -2 par la fonction f .
- Déterminer l'ensemble de définition de fonctions suivantes :

1 $f_1(x) = x^3 + 12x - 5$	5 $f_5(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{ x+2 -3}$
2 $f_2(x) = \frac{-2x+4}{5x+3}$	6 $f_6(x) = \sqrt{\frac{2-x}{4x+2}}$
3 $f_3(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2+2x-4}$	7 $f_7(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{4x+2}}$
4 $f_4(x) = \frac{4x^2-5}{\sqrt{2x^2+2x-4}}$	8 $f_8(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)-1}$

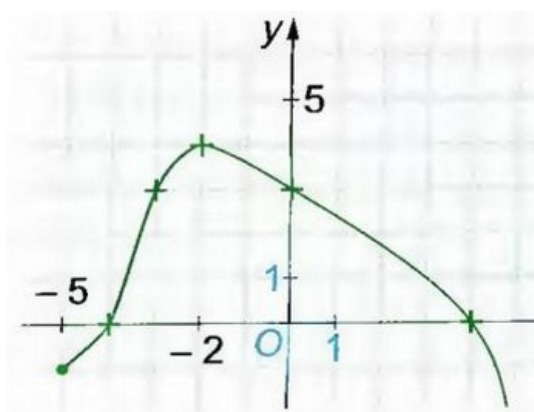
- Comparer les fonctions suivantes :

$$1 \quad f_1(x) = x \text{ et } g_1(x) = \frac{x^2}{x}$$

$$2 \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}-2} \text{ et } g_2(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-4}$$

7-2/ Exercice 2

La figure suivante présente la courbe d'une fonction :



- Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .
- Déterminer les images des nombres suivants : -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; 0 ; 4
- Déterminer les antécédents de 5 et 3 .
- Étudier la parité de fonctions suivantes :

$$1 \quad f_1 : x \mapsto |x| - \frac{1}{x^2}$$

$$2 \quad f_2 : x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$$

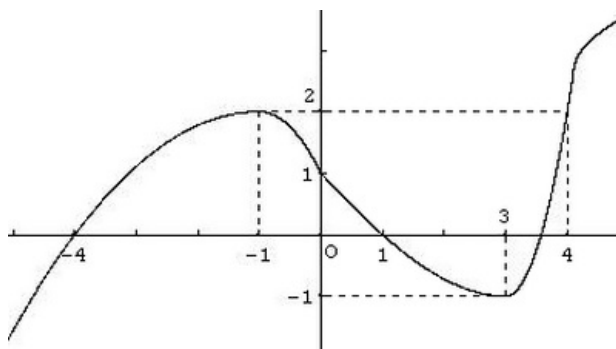
$$3 \quad f_3 : x \mapsto x^2 + x - 3$$

$$4 \quad f_4 : x \mapsto |x-1| - |x+1|$$

7-3/ Exercice 3

Partie 1

La courbe (C_f) suivante est la courbe d'une fonction f , on précise de plus que $f(3, 5) = 0$.



1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .
2. Dresser le tableau de variation de f .
3. Résoudre graphiquement les inéquations $f(x) \geq 0$ et $f(x) < 0$.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) > 2$

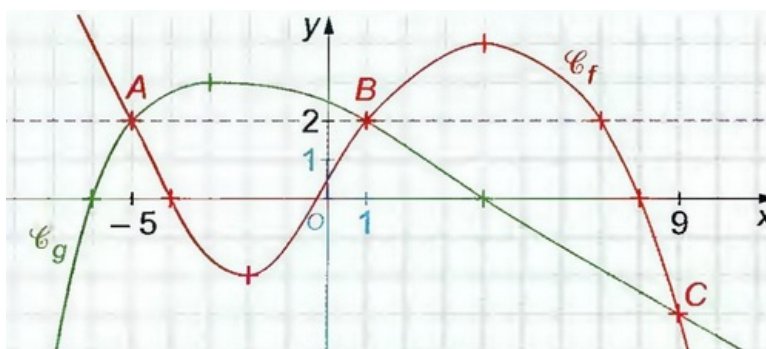
On considère les fonctions g et h définies par : $g(x) = \sqrt{f(x)}$ et $h(x) = \frac{4x-5\sqrt{x}}{f(x)}$

5. Donner D_g et D_h .

Partie 2

Les fonctions f et g sont définies sur \mathbb{R} .

Leurs représentations graphiques sont données dans le graphe suivant :



1. Résoudre graphiquement ce qui suit :

$$g(x) = 2 ; f(x) = 7 ; f(x) = 2 ; g(x) < 2 ; f(x) \geq 2$$

$$g(x) = f(x) ; g(x) \geq f(x) ; g(x) < f(x) ; g(x) \geq 0$$

7-4/ Exercice 4

Partie 1

Soit f une fonction numérique définie par : $f(x) = x + \frac{4}{x}$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est impaire.
3. Montrer que si a et b sont deux nombres réels distincts non nuls, alors :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{ba-4}{ba}$$

4. Étudier les variations de f sur chacun des intervalles $[2, +\infty[$ et $]0, 2]$.
5. En déduire les variations de f sur chacun des intervalles $] -\infty, -2]$ et $[-2, 0[$

6. Dresser le tableau de variations de f sur D_f .

Partie 2

Soit f une fonction définie par : $f(x) = -x^2 + 2x$

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que 1 est un maximum de f sur D_f .
3. Montrer que si a et b sont deux nombres réel distincts de D_f , alors :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2 - a - b$$

4. Étudier les variations de f sur chacun des intervalles $[1, +\infty[$ et $] -\infty, 1]$.
5. Dresser le tableau de variations de f sur D_f .

On considère la fonction g définie par : $g(x) = -x^2 + 2|x|$

6. Déterminer D_g l'ensemble de définition de g
7. Montrer que pour tout x de \mathbb{R}^+ , on a : $g(x) = f(x)$
8. En déduire le tableau de variation de g .