AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 7-3 : Calcul intégral - Problème de synthèse

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

VII- Problème de synthèse

7-1/ Partie 1

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$

1. Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son domaine de définition.
2. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ e^x \geq x + 1$
3. Étudier les variations de la fonction f.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

4. Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}$.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

7-3/ Partie 2

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t)\,\mathrm{d}\,t \ \ (x > 0) \\ F(0) = 2\ln 2 \end{cases}$$

1. a- Vérifier que : $\int_{x^2}^{4x^2} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}\,t = 2\ln 2$
1. b- En utilisant le résultat de la question 2 de la partie 1, montrer que : $(\forall t > 0)\ \ -t \leq e^{-t} - 1 \leq 0$
2. a- Montrer que : $(\forall x > 0)\ \ -3x^2 \leq F(x) - 2\ln 2 \leq 0$
2. b- En déduire que la fonction F est continue et dérivable à droite en zéro.
3. a- Montrer que : $(\forall t \geq 1)\ f(t) < e^{-t}$
3. b- En déduire la limite suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

4. a- Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, puis calculer $F'(x)$.
4. b- Dresser le tableau des variations de F.
4. c- Construire $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de F dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Soit G la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $G(x) = \int_x^{4x} e^{-t} \ln(t) \, \mathrm{d}\, t$

5. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$:
   $G(x) = F\left(\sqrt{x}\right) - e^{-4x} \ln(4x) + e^{-x} \ln(x)$
6. Calculer la limite : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(e^{-x} - e^{-4x}\right) \ln x$
7. En déduire la limite : $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x)$