AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 7-2-2 : Calcul intégral - Partie 2 (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

VI- Exercices II

6-1/ Exercice 2-1

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_x^{2x}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$

1. Montrer que la fonction F est impaire.
2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, il existe $c\in[x;2x]$ tel que $F(x)=\frac{x}{\sqrt{1+c^2+c^4}}$.
3. En déduire que $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ 0\leq F(x)\leq\frac{1}{x}$, puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.
4. Calculer $F'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

6-2/ Exercice 2-2

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$ avec $||\overrightarrow{i}||=2cm$ et $||\overrightarrow{j}||=4cm$.

1. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions f et g définies sur $\left[e;e^2\right]$ par :

$$f(x)=\frac{x+1}{x\ln x}\text{ et }g(x)=\frac{1}{\ln x}$$

6-3/ Exercice 2-3

- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ dans chacun des cas suivants :

$$1 \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2.\sqrt[3]{n^3+k^3}}$$
$$2 \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+k}{n^2+k^2}$$
$$3 \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{\sqrt{(n^2+k^2)^3}}$$
$$4 \quad u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n+k}}$$

6-4/ Exercice 2-4

Soit f la fonction numérique définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x) = e^{-\sqrt{x-1}}$

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ avec :

$|| \overrightarrow{i} || = || \overrightarrow{j} || = 2cm$

On pose : $(\forall x \in]0;1])\ F(x) = \int_1^{1+(\ln x)^2} f(t)\,\mathrm{d}\,t$

1. Montrer que $(\forall x \in]0;1])\ F\text{'}(x) = 2\ln x$
2. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in]0;1]$.

Pour tout $\alpha \geq 1$, on note $S(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

3. Montrer que $S(\alpha) = F(f(\alpha))$ (en unité d'aire)
4. Calculer $S(\alpha)$ et $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} S(\alpha)$