

Sommaire

VI- Exercices II

6-1/ Exercice 2-1

6-2/ Exercice 2-2

6-3/ Exercice 2-3

6-4/ Exercice 2-4

VI- Exercices II

6-1/ Exercice 2-1

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$

1. Montrer que la fonction F est impaire.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $c \in [x; 2x]$ tel que $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1+c^2+c^4}}$.
3. En déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}$, puis en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
4. Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

6-2/ Exercice 2-2

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 4cm$.

1. Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes des fonctions f et g définies sur $[e; e^2]$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{x \ln x} \text{ et } g(x) = \frac{1}{\ln x}$$

6-3/ Exercice 2-3

- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ dans chacun des cas suivants :

$$\begin{aligned}
1 \quad u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 \cdot \sqrt[3]{n^3+k^3}} \\
2 \quad u_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n+k}{n^2+k^2} \\
3 \quad u_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{\sqrt{(n^2+k^2)^3}} \\
4 \quad u_n &= \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{n+k}}
\end{aligned}$$

6-4/ Exercice 2-4

Soit f la fonction numérique définie sur $[1; +\infty[$ par : $f(x) = e^{-\sqrt{x-1}}$

Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$$

On pose : $(\forall x \in]0; 1]) \quad F(x) = \int_1^{1+(\ln x)^2} f(t) dt$

1. Montrer que $(\forall x \in]0; 1]) \quad F'(x) = 2 \ln x$
2. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in]0; 1]$.

Pour tout $\alpha \geq 1$, on note $S(\alpha)$ l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

3. Montrer que $S(\alpha) = F(f(\alpha))$ (en unité d'aire)
4. Calculer $S(\alpha)$ et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} S(\alpha)$