

Sommaire

IV- Intégration et ordre

4-1/ Positivité et croissance

4-2/ Intégrale et valeur absolue

4-3/ Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

V- Applications du calcul intégral

5-1/ Calcul des aires

5-2/ Calcul des volumes

5-3/ Encadrement d'une intégrale par deux suites (méthode des rectangles)

IV- Intégration et ordre

4-1/ Positivité et croissance

Proposition 6

Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a; b]$ ($a < b$).

Si f est positive sur $[a; b]$ alors : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$, alors : $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Applications

1. Montrer que $0 \leq \int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt \leq \frac{\pi}{2} - 1$ et $\frac{\pi}{3} \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+t}{\cos t} dt \leq \frac{2\pi^2}{9} + \frac{2\pi}{3}$.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $0 \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} \leq \frac{1}{x}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} x^n \cos(3x) dx$

3. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}$

5. En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$

4-2/ Intégrale et valeur absolue

Proposition 7

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et soit $(a; b) \in I^2$ tel que $a \leq b$.

On a alors : $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

4-3/ Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment

Proposition 8

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et soit $(a; b) \in I^2$ tel que $a \leq b$.

S'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in [a; b]$: $m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

S'il existe un réel M tels que pour tout $x \in [a; b]$: $|f(x)| \leq M$, alors :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b-a)$$

Définition 1

Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$ ($a < b$)

La valeur moyenne de la fonction f sur $[a; b]$ est le nombre réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Proposition 9

Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$ ($a < b$).

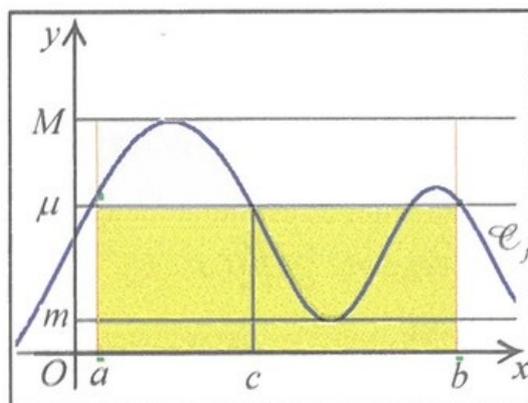
Il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que : $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$

Ce résultat porte le nom de « Théorème de la moyenne »

Remarques

Si $f([a; b]) = [m; M]$ et F désigne une primitive de la fonction f sur $[a; b]$, alors la formule $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$ est équivalente à $F(b) - F(a) = (b-a)f(c)$, et cette formule n'est qu'une copie de la formule du théorème des accroissements finis appliquée à la fonction F .

Graphiquement, une interprétation de ce théorème est que l'aire algébrique sous la courbe \mathcal{C}_f est égale à celle d'un rectangle de base $[a; b]$, et de hauteur l'ordonnée d'un point moyen de la courbe.



V- Applications du calcul intégral

5-1/ Calcul des aires

Proposition 10

Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$ ($a < b$), et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine délimité par \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b |f(x)| dx$ (en unité d'aire).

Proposition 11

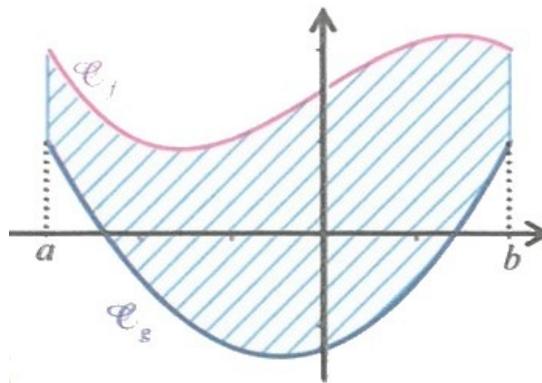
Le plan est rapporté à un repère orthogonal.

Soit f et g deux fonctions continues sur un segment $[a; b]$.

Soit \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives de f et g .

Soit (Δ) le domaine délimité par les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Alors : L'aire du domaine (Δ) en unités d'aire est donnée par : $\sigma(\Delta) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$



5-2/ Calcul des volumes

Proposition 12

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

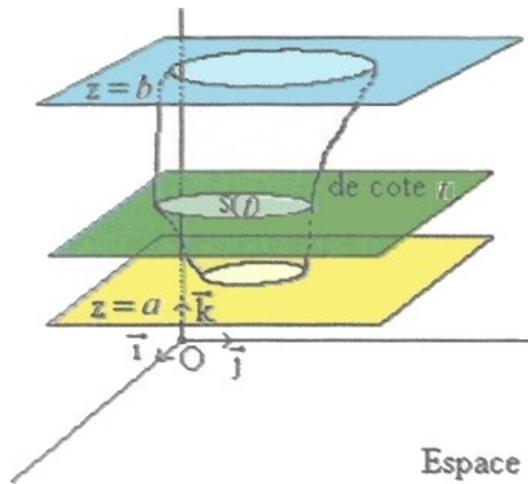
Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

On considère un solide (S) limité par deux plans parallèles au plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$:

- le plan de cote a d'équation $z = a$
- le plan de cote b d'équation $z = b$

Si $S(t)$ est l'aire de l'intersection du solide (S) avec tout plan parallèle $(O; \vec{i}; \vec{j})$ de cote t ,

alors le volume de ce solide est (en unités de volume) : $v(S) = \int_a^b S(t) dt$

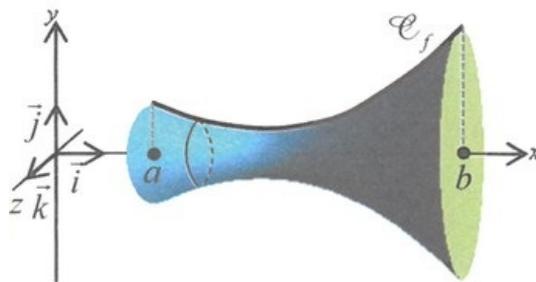


Proposition 13

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ ($a < b$), et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe \mathcal{C}_f autour de l'axe des abscisses un tour complet est donné par la formule : $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$ (en unités de volume)



Proposition 14

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un segment $[a, b]$ ($a < b$), et \mathcal{C}_f sa courbe

représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe \mathcal{C}_f autour de l'axe des ordonnées un tour complet est donné la formule : $V = \pi \left| \int_{f(a)}^{f(b)} (f^{-1}(x))^2 dx \right|$ (en unité de volume)

Si de plus, f est dérivable sur $[a, b]$ alors : $V = \pi \left| \int_a^b x^2 |f'(x)| dx \right|$ (en unité de volume)

5-3/ Encadrement d'une intégrale par deux suites (méthode des rectangles)

Proposition 15

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ ($a < b$).

Pour tout entier $n \geq 2$ on pose :

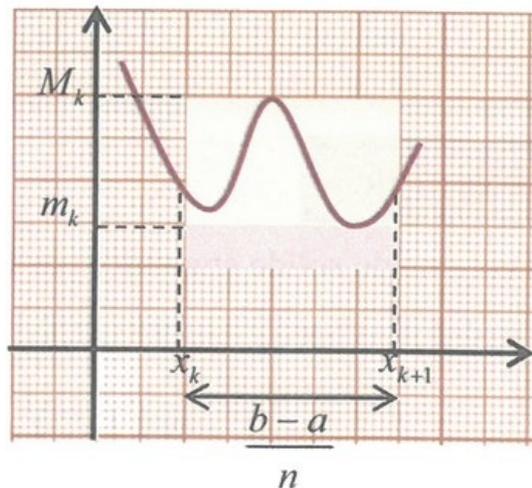
$$x_0 = a; x_1 = a + \frac{b-a}{n}; \dots; x_k = a + k \frac{b-a}{n}; \dots; x_n = a + n \frac{b-a}{n} = b$$

Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on note M_k la valeur maximale et m_k la valeur minimale de f sur le segment $[x_k; x_{k+1}]$.

On pose enfin $\lambda_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} M_k$ et $\mu_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} m_k$

On a alors pour tout entier $n \geq 2$:

$$\lambda_n \leq \int_a^b f(x) dx \leq \mu_n$$



Proposition 16

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ ($a < b$).

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on pose :

$$s_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \text{ et } S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

Alors les deux suites $(s_n)_{n \geq 1}$ et $(S_n)_{n \geq 1}$ convergent et admettent $\int_a^b f(x) dx$ comme limite commune.

Autrement dit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

Applications

Calculer la limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2 + k^2}$$