

Sommaire

XII- Problème de synthèse

---

XII- Problème de synthèse

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

On considère l'application  $r$  qui à chaque point  $M(z)$  du plan, associe le point  $M_1(z_1)$  tel que  $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

Et on considère l'application  $h$  qui à chaque point  $M(z)$  du plan, associe le point  $M_2(z_2)$  tel que  $z_2 = -2z + 3i$ .

Et on pose :  $F = h \circ r$

1. Déterminer la nature de chacune des applications  $r$  et  $h$  et déterminer les éléments caractéristiques de chacune d'elles.

On considère les points  $\Omega(i)$  et  $A(a)$  où  $a$  est un nombre complexe différent de  $i$ .

On pose  $B = F(A)$ ,  $C = F(B)$  et  $D = F(C)$ .

2. Montrer que si  $M'(z')$  est l'image du point  $M(z)$  par l'application  $F$ , alors  $z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z - i)$ .
3. Vérifier que  $\Omega$  est l'unique point invariant par l'application  $F$  (c'est-à-dire :  $F(\Omega) = \Omega$ )
4. Déterminer en fonction du nombre  $a$ , les nombres complexes  $b$ ,  $c$  et  $d$ , affixes respectives des points  $B$ ,  $C$  et  $D$ .
5. Montrer que les points  $\Omega$ ,  $A$  et  $D$  sont alignés.
6. Montrer que  $\Omega$  est le barycentre du système pondéré  $\{(B; 4); (C; 2); (D; 1)\}$ .
7. Déterminer l'ensemble des points  $A(a)$  pour que le point  $D$  appartienne à l'axe réel.