AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 6-1-2 : Nombres complexes - Partie 1 (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

VII- Exercices I

7-1/ Exercice 1-1

7-2/ Exercice 1-2

7-3/ Exercice 1-3

7-4/ Exercice 1-4

VII- Exercices I

7-1/ Exercice 1-1

1. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe suivant :

$$Z=(1+i)\left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2-(1+3i)\left(\frac{2+i}{1-i}\right)+6$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E_1)\ (-1+4i)z+(1-2i)=iz+3$$
$$(E_2)\ \frac{1+3iz}{1+3z}=i\frac{z+2}{z-5}$$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ les systèmes suivants :

$$(S_1)\ :\ \begin{cases}2iz+3z'=i\\ iz+z'=2\end{cases}$$
$$(S_2)\ :\ \begin{cases}3z-2z'=-11\\ iz+(1+i)z'=3\,(4-i)\end{cases}$$

4. Montrer que l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $\frac{iz}{z-2}$ est réel est :

$$E=\left\{x+iy/(x-1)^2+y^2=1\ et\ (x;y)\neq(2;0)\right\}$$

Soit $z=x+iy$ un nombre complexe tel que $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

5. Déterminer tous les nombres complexes z dans chacun des cas suivants :

$$1\ \ iz^2\in\mathbb{R}$$
$$2\ \ z^2+z+1\in\mathbb{R}$$
$$3\ \ \frac{1-iz}{1+z}\in i\mathbb{R}$$

$$4 \quad \frac{z-1}{iz} \in i\mathbb{R}$$
$$5 \quad \frac{3+iz}{(1+i)z-1} \in \mathbb{R}$$

7-2/ Exercice 1-2

1. Déterminer le module de chacun des nombres suivants :

$z_1 = \left(\sqrt{3}+i\sqrt{2}\right)^2$ $z_2 = (2+3i)^2 + 5i$ $z_3 = (3+2i)^3$ $z_4 = \frac{2017+2i}{2017-2i}$	$z_5 = \left(\frac{\sqrt{17}-i}{5+3i}\right)^4$ $z_5 = \left(\sqrt{7}+i\right)\left(7-i\sqrt{11}\right)$ $z_7 = i(3-4i)^3(4+i)^2$

Soit u un nombre complexe tel que $|u| = 1$ et $u \neq 1$.

2. Montrer que $Re\left(\frac{1}{1-u}\right) = \frac{1}{2}$
3. Montrer que si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $\frac{z-u\overline{z}}{1-u}$ est réel.

7-3/ Exercice 1-3

1. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ $z_2 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$ $z_3 = -2i$ $z_4 = \frac{2i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$ $z_5 = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$	$z_6 = \left(\sqrt{3}-i\right)^7$ $z_7 = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^8$ $z_8 = (1-i)\left(1-i\sqrt{3}\right)$ $z_9 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{10}$ $z_{10} = \frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)^{12}}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^7}$

7-4/ Exercice 1-4

1. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha \; ; \; (\pi < \alpha < 2\pi)$$
$$z_2 = \cos\alpha + i\left(1+\sin\alpha\right) \; ; \; \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$z_3 = \frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{(\cos\alpha+\sin\alpha)+i(\cos\alpha-\sin\alpha)} \; ; \; (\alpha \in \mathbb{R})$$
$$z_4 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \; ; \; \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$$