

I- Exercice 1 (9 pts)

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, on considère l'équation :

$$(E) : z^2 + [(1-a)i - a]z + a + a^2i = 0$$

1. Montrer que : $\Delta = [(1+a)i - a]^2$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .
3. Montrer que l'équation (E) admet une seule solution $\Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Supposons que $a \neq -1$, $a \neq -1$, $a \neq -i$ et $a \neq \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Soient $A(a)$, $B(ai)$, $C(a-i)$ et $D(-i)$.

4. Montrer que A , B et C sont alignés $\Leftrightarrow \arg a \equiv \frac{3\pi}{4} [\pi]$

On pose $a = i$.

Soit R la rotation de centre B telle que $R(A) = D$.

5. Déterminer l'angle de la rotation R .

II- Exercice 2 (6 pts)

On considère l'application :

$$F : P \rightarrow P$$
$$M(z) \rightarrow M(z')/z' = (1+i)z - i$$

1. Montrer que F admet un seul point invariant A .
2. Montrer que $AM' = \sqrt{2}AM$ et $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$.
3. Montrer que AMM' est un triangle rectangle.

III- Exercice 3 (5 pts)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z-i)^5 = i(z+i)^5$
2. Montrer que si l'équation $z^2 - az + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$; $a \in \mathbb{C}$ admet deux solutions z_1 et z_2 , alors : $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $|z_1| \times |z_2| = 1$.