

I- Exercice 1 (6 pts)

Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+4}{u_n+6} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Vérifier que $u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n-1)}{u_n+6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$.
4. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n-1)(u_n+4)}{u_n+6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Dédire la monotonie de $(u_n)_{n \geq 0}$.

On pose $v_n = \frac{u_n+4}{u_n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = \frac{7(u_n+4)}{2(u_n-1)}$
7. Dédire que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{7}{2}$, et calculer v_0 .
8. Exprimer v_n en fonction de n .
9. En déduire u_n en fonction de n .

II- Exercice 2 (5 pts)

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 2 \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < \frac{5}{2}$
3. Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5} \left(\frac{5}{2} - u_n \right)$
4. Dédire que la suite (u_n) est croissante.

On pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = u_n - \frac{5}{2}$

5. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$, et calculer v_0 .
6. Exprimer v_n en fonction de n , puis déduire u_n en fonction de n .

Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{20}$

7. Calculer S .

III- Exercice 3 (4 pts)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:

$$\begin{aligned}A(x) &= \sin(-x) + \cos(-x) + \sin(\pi + x) + \cos(\pi - x) \\B(x) &= \cos(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) \\C(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(x - 3\pi) - \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)\end{aligned}$$

2. Calculer $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ et $C\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

IV- Exercice 4 (5 pts)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $P(x) = \sqrt{3} \cos(3x) + \sin(3x) - \sqrt{3} \cos x - \sin x$

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : P(x) = 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$
3. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : P(x) = -4 \sin x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
4. Résoudre dans $[0; \pi]$ l'inéquation : $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$
5. En déduire le tableau de signe de $P(x)$ sur $[0; \pi]$.