AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 6-1-1 : Nombres complexes - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- L'ensemble des nombres complexes

1-1/ Notion de nombre complexe

1-2/ Forme algébrique d'un nombre complexe

1-3/ Égalité de deux nombres complexes

II- Opérations sur les nombres complexes

2-1/ Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

2-2/ Opposé d'un complexe - différence de deux complexes

2-3/ Inverse d'un nombre complexe non nul - quotient de deux nombres complexes

III- Représentation géométrique d'un nombre complexe

3-1/ Affixe d'un point - affixe d'un vecteur

3-2/ Interprétation géométrique de la somme, la différence et la multiplication par un réel

3-3/ Interprétation complexe de la linéarité, du parallélisme et du barycentre

IV- Conjugué d'un nombre complexe

4-1/ Définition et interprétation géométrique

4-2/ Propriétés du conjugué

V- Module d'un nombre complexe

5-1/ Définition et interprétation géométrique

5-2/ Propriétés du module

VI- Forme trigonométrique d'un complexe

6-1/ Argument d'un nombre complexe non nul

6-2/ Forme trigonométrique d'un nombre complexe

6-3/ Angle de deux vecteurs et argument d'un complexe

6-4/ Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

I- L’ensemble des nombres complexes

1-1/ Notion de nombre complexe

Théorème 1

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$:

1- muni d’une addition notée et d'une multiplication notée , ou le plus souvent implicitement (c'est-à-dire sans symbole, comme dans $\mathbb{R}$) possédant les mêmes propriétés comme dans $\mathbb{R}$.

2- possédant un élément noté dont le carré vaut : .

3- où tout élément z, appelé nombre complexe ou complexe, s’écrit de manière unique sous la forme , avec et réels.

Remarques

- On a : $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

- L’addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.

- Contrairement à $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est usuellement muni d'aucune relation d’ordre, et nous ne pourrons donc pas dire qu’un nombre complexe est inférieur à un autre ou non plus qu’il est positif.

- Les nombres complexes et où $\left(\quad\right)$ $\mathbb{R}$ représentent le même nombre complexe.

- On a : $\mathbb{C}$ $\{\qquad\qquad\mathbb{R}\}$

1-2/ Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1

Étant donné $\mathbb{C}$, il existe un unique couple $\left(\quad\right)$ $\mathbb{R}$ tel que .

L’écriture s'appelle la forme algébrique du nombre complexe .

Le nombre est la partie réelle de notée .

Le nombre est la partie imaginaire de notée .

Un nombre complexe est réel lorsque sa partie imaginaire est nulle :
$\mathbb{R}$.

Un nombre complexe est dit imaginaire pur si sa partie réelle est nulle :
$\mathbb{R}$.

1-3/ Égalité de deux nombres complexes

Proposition 1

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires.

En d'autres termes :

$$(\qquad \mathbb{C})$$

Remarques

Le résultat de la proposition 1 est une conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.

Pour tout nombre complexe z :

$$(\qquad \mathbb{C})$$

II- Opérations sur les nombres complexes

2-1/ Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

Proposition 2

Soit et deux nombres complexes tels que : et avec $\mathbb{R}$.

On a :

1- et

2- Pour tout $\mathbb{R}$

Remarques

Pour tout $\mathbb{C}$ et pour tout $\mathbb{R}$, on a :

Si $\mathbb{N}$, alors $(\quad)$. Il en résulte donc :

2-2/ Opposé d'un complexe - différence de deux complexes

Proposition 3

Tout nombre complexe , où et sont des réels, possède un opposé dans $\mathbb{C}$ noté , qui est le nombre complexe , et on écrit .

Donc :

Définition 2

La différence de deux nombres complexes et est le nombre

.

Remarques

Si , , et sont des nombres réels, alors :

Les identités remarquables vues dans $\mathbb{R}$ restent aussi valables dans $\mathbb{C}$.

Ainsi, pour tous nombres complexes et on a :

$$(\quad)(\quad)$$

En particulier, on a les égalités suivantes, valables pour tout $(\quad) \quad \mathbb{R}$:

$$(\quad)(\quad)$$

On a aussi :

$$(\quad)(\quad)$$
$$(\quad)(\quad)$$

Et de façon générale, on a pour tout $\mathbb{C}$ et pour tout $\mathbb{N}$:

$\sum \quad \sum$ (Formule du binôme de Newton)

$$(\quad)$$

$$\sum$$

Un produit de nombres complexes est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

En particulier :

$$\mathbb{C}$$

2-3/ Inverse d'un nombre complexe non nul - quotient de deux nombres complexes

Proposition 4

Soit un nombre complexe non nul tels que $(\quad) \quad \mathbb{R}$.

L'inverse du nombre est le nombre complexe noté $-$ ou tel que :

$$- \quad \frac{}{} \quad \frac{}{} \quad \frac{}{} \quad \frac{}{}$$

Proposition 5

Soit et deux complexes où , , et des réels tels que .

Le quotient de par est le nombre complexe noté — tel que — −, et on a :

— ——— ——— ———

III- Représentation géométrique d’un nombre complexe

3-1/ Affixe d'un point - affixe d’un vecteur

Définition 3

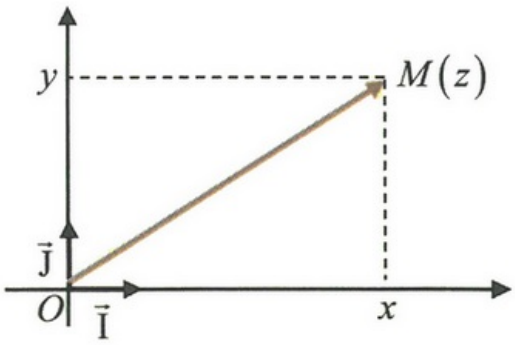
Le plan est muni d’un repère orthonormé direct .

Soit où ( ) $\mathbb{R}$ un nombre complexe.

L’unique point , de coordonnées dans , est appelé l’image du complexe , et on écrit .

Soit un point, de coordonnées dans .

Le nombre complexe est appelé l'affixe du point . On le note ou .



Remarques

Le plan est muni d’un repère orthonormé direct .

À partir de la définition 3, on peut identifier l’ensemble au plan de la façon suivante :

- À tout nombre complexe on associe le point .
- À tout point du plan on associe le nombre complexe .

Ainsi, l’application $\mathbb{C}$ est une bijection. Sa bijection réciproque est : $\mathbb{C}$

Le plan est appelé alors le plan complexe, et on a :

$$(\qquad)$$

Tout point de l'axe des abscisses est l'image d'un nombre réel, c'est pourquoi l'axe des abscisses

s'appelle l'axe réel. On a alors : $\mathbb{R}$

Tout point de l'axe des ordonnées est l'image d'un nombre imaginaire pur , c'est pourquoi l'axe des ordonnées s'appelle l'axe imaginaire.

On a alors : $\mathbb{R}$

Définition 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct .

Soit un nombre complexe où .

Le vecteur est appelé image du complexe , et on écrit .

De même, le nombre est appelé affixe du vecteur , et on écrit ou parfois .

Remarques

Soit un nombre complexe.

On a :

Soit l'ensemble des vecteurs du plan.

L'application $\mathbb{C}$

est une bijection de $\mathbb{C}$ vers , et on a :

3-2/ Interprétation géométrique de la somme, la différence et la multiplication par un réel

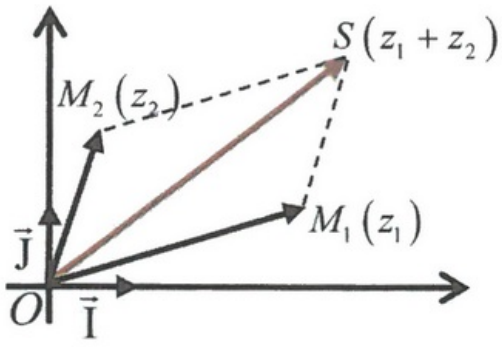
Proposition 6

Si et sont deux vecteurs du plan d'affixes respectives et , alors

l'affixe du vecteur est .

En d'autres termes : .

Si et sont les images respectives des affixes et , alors l'image du nombre est le point tel que : (C'est-à-dire est un parallélogramme).



Remarques

Soit un nombre complexe et et deux vecteurs du plan.

On sait que et , donc d'après la proposition 6, on en déduit que .

Ainsi et alors : .

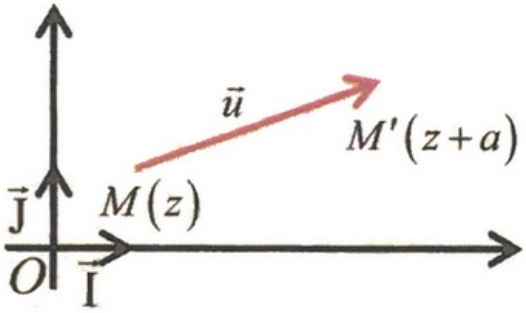
Soit et . Comme et , alors ,

et par suite .

Ainsi, le point est le symétrique de point par rapport à .

On peut aussi interpréter géométriquement l'addition de la manière suivante :

Étant donné un vecteur d'affixe , la translation de vecteur transforme le point d'affixe , en le point d'affixe .

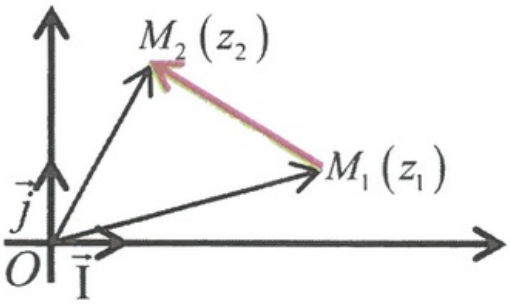


Proposition 7

Soit et deux points du plan complexe.

Alors l'affixe du vecteur est .

En d'autres termes :

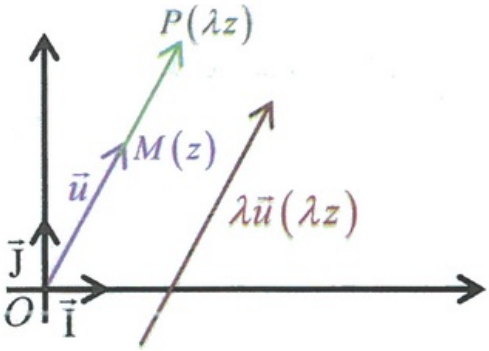


Proposition 8

Si est un vecteur d'affixe et un nombre réel, alors l'affixe du vecteur est .

En d'autres termes :

Si est un point du plan, alors l'image du nombre complexe est le point défini par : .



Remarque

A l'aide des propositions 6 et 8, on peut établir le résultat suivant :

Si et sont deux vecteurs du plan, alors pour tout $\mathbb{R}$, on a :

3-3/ Interprétation complexe de la linéarité, du parallélisme et du barycentre

Proposition 9

Soient , et des points deux à deux distincts d'affixes respectives , et .

Les points , et sont alignés si et seulement si : ——— $\mathbb{R}$

Proposition 10

Soient , , et quatre points du plan d'affixes respectives , , et tels que et .

Les droites et sont parallèles si et seulement si : ——— $\mathbb{R}$

Proposition 11

Soit et deux points du plan d'affixes respectives et , et soit $\mathbb{R}$ tel que .

L'affixe du barycentre du système pondéré est le complexe :

$$\overline{}$$

Remarques

Si et alors l'affixe du milieu du segment est le nombre complexe $\overline{}$.

En fait ceci n'est rien qu'un cas particulier du barycentre où les « poids » sont égaux.

On peut généraliser le résultat de la proposition 11 pour le barycentre de plus de deux points.

Plus précisément : si est un entier naturel supérieur ou égal à et des réels tels que , alors le barycentre du système pondéré a pour affixe :

$$\overline{}$$

IV- Conjugué d'un nombre complexe

4-1/ Définition et interprétation géométrique

Définition 5

Soit un nombre complexe avec $\left(\quad \right)$ $\mathbb{R}$.

On appelle conjugué de le nombre complexe , noté $\overline{}$, et on écrit :

$\overline{}$.

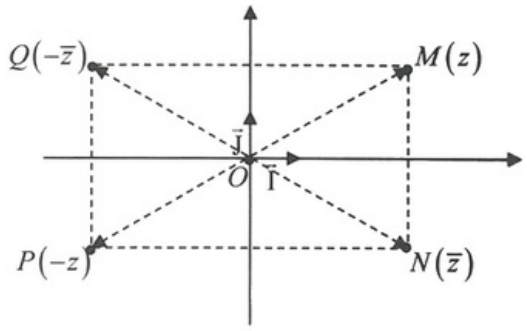
On a alors: $\overline{}$ et $\overline{\overline{}}$

Interprétation géométrique de la conjugaison

Soit un nombre complexe avec $\left(\quad \right)$ $\mathbb{R}$.

La symétrie par rapport à l'axe des abscisses transforme le point en , d'affixe $\overline{}$.

La symétrie par rapport à l'axe des abscisses transforme le point en , d'affixe $\overline{}$.



4-2/ Propriétés du conjugué

Proposition 12

Étant donné $\mathbb{C}$, on a :

On a donc :

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

Remarque

En pratique, pour éliminer les complexes du dénominateur d'une fraction, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Proposition 13

Soit et deux nombres complexes.

On a alors les propriétés suivantes :

- et

- Pour tout $\mathbb{R}$:

- Si , alors $(-)$ $=$ et $(-)$

- Si et $\mathbb{Z}$, alors

Remarques

1- Soit , et des nombres complexes. Alors :

$\sum$ $\sum$ $\prod$ $\prod$

2- Soit un polynôme dans $\mathbb{C}$ à coefficients réels :

$(\ )$

(les nombres . an sont alors réels). On a alors pour tout $\mathbb{C}$:

Puisque pour tout entier compris entre et (au sens large) : et

Alors .

En particulier, si est racine du polynôme (c'est-à-dire), alors est aussi racine de car :

On obtient alors le résultat important suivant :

« Si est racine d'un polynôme à coefficients réels, alors est aussi racine de ce polynôme »

V- Module d'un nombre complexe

5-1/ Définition et interprétation géométrique

Définition 6

Soit un nombre complexe avec $(\quad) \quad \mathbb{R}$.

Le module de est le réel positif noté défini par : $\sqrt{\quad}$

On a alors :

Remarques

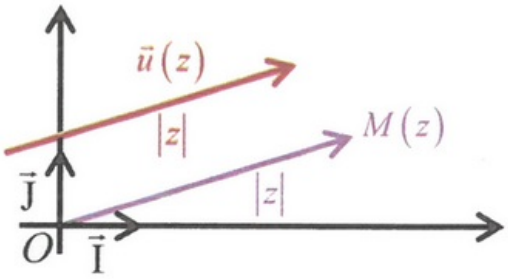
La notion de module prolonge celle de la valeur absolue, c'est-à-dire que le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.

On a pour tout $\mathbb{C}$: et . Si alors :

Interprétation géométrique du module

Étant donné $\mathbb{C}$, d'image , le module de est la distance :

Si est un vecteur d'affixe , alors :



Proposition 14

La distance entre deux points et , d'affixes respectives et , est :

Proposition 15

Soit un nombre complexe et un réel strictement positif. On note l'image de .

L'ensemble des images des nombres complexes tels que :

- est le cercle de centre et de rayon .
- est le disque fermé de centre et de rayon .
- est le disque ouvert de centre et de rayon .

5-2/ Propriétés du module

Proposition 16

Soit et deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

- et et
- et
-
-

Si et $\mathbb{Z}$ alors : – — et — — et

Remarque

Si est un entier supérieur ou égal à , et des nombres complexes, alors :

$$\prod \qquad \prod$$

Proposition 17

Étant donné deux nombres complexes et , on a :

C'est l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes.

VI- Forme trigonométrique d'un complexe

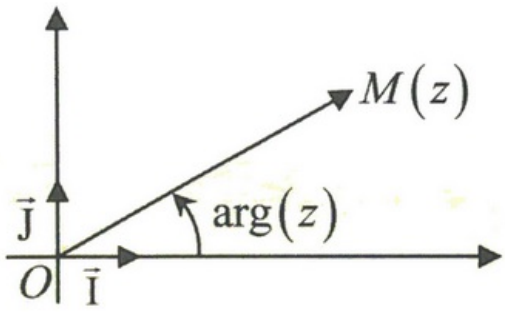
6-1/ Argument d'un nombre complexe non nul

Définition 7

Soit un nombre complexe non nul, d'image dans le plan complexe .

Toute mesure de l'angle orienté s'appelle un argument de .

On le note et on écrit :



Remarques

Soit un nombre complexe non nul.

Si est un argument du nombre complexe , alors tout nombre réel de la forme avec $\mathbb{Z}$ est aussi un argument de .

Dans la pratique, on prend souvent dans l'intervalle , c'est-à-dire la

mesure principale de l'angle .

Le nombre est l'unique nombre complexe qui n'a pas d'argument.

6-2/ Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Proposition 18

Soit un nombre complexe non nul avec ( ) $\mathbb{R}$ et un argument de .

Alors et .

Tout nombre complexe non nul s'écrit de manière unique sous la forme , où est un argument de .

Définition 8

Soit un nombre complexe non nul et un argument de .

L'écriture est appelée une écriture trigonométrique ou forme trigonométrique du nombre complexe .

Notation simplifiée :

Remarque

Tout nombre complexe non nul admet une infinité de formes trigonométriques.

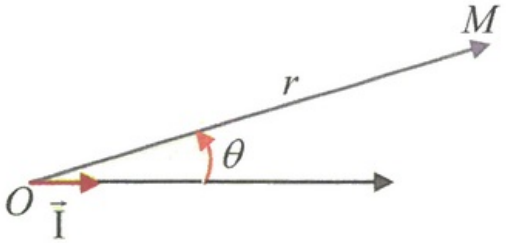
Si $\mathbb{C}$ alors :

Définition 9

Soit un nombre complexe non nul et son image dans le plan complexe.

On pose et une mesure de l'angle .

Le couple est appelé le couple des coordonnées polaires du point par rapport à l'axe polaire . Le point est le pôle



Proposition 19

Soit $\mathbb{C}$.

Si tel que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$, alors : et

Proposition 20

Soit un nombre complexe non nul.

On a les équivalences suivantes :

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ $-$

$\mathbb{R}$ $-$

$\mathbb{R}$ $-$

Remarques

1- Les propositions 18 et 19 nous indiquent que toute écriture du genre avec $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est une forme géométrique d'un nombre complexe de module et d'argument .

2- La proposition 20 nous facilite la détermination d'une forme trigonométrique d'un nombre réel ou imaginaire pur. En effet, si est un nombre réel strictement positif, alors :

3- La détermination d'une écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul est équivalente à la détermination de son module et d'un de ces arguments. Pratiquement :

Si avec $(\quad)$ $\mathbb{R}$ alors $\sqrt{\quad}$, et donc :

$$-\quad \frac{}{\sqrt{\quad}} \quad \frac{}{\sqrt{\quad}}$$

Et si alors , et donc :

$$-$$

Par conséquent : $\frac{}{\sqrt{\quad}}$ et $\frac{}{\sqrt{\quad}}$

Ainsi, la connaissance de et permet la détermination d'un argument de . (On pourra utiliser les boutons et de la calculatrice).

4- Si avec $\mathbb{R}$ alors . Par suite :

est une forme trigonométrique du nombre .

Proposition 21

Pour des nombres complexes non nuls et , on a :

—

Corollaire

Soit un nombre complexe non nul.

Si alors : — et .

En particulier, on a : — et

Proposition 22

Soient et deux nombres complexes non nuis tels que et

On a les relations suivantes :

[ ]

– [–] (–)

– [–] (–)

$\mathbb{Z}$ [ ]

Remarques

Soit un entier supérieur ou égal à , et z, , z2 ,.. zn des nombres complexes non nuis. Alors :

$(\prod \quad) \quad \sum$

Si et sont deux nombres complexes non nuls tels que , alors on n'a pas en général .

Contre-exemple :

– et – et – –

Soit et deux nombres complexes non nuls, et soit et leurs images

respectives dans le plan rapporté à un repère orthonormé

À partir de la proposition 22, on peut déduire que le point est le point du plan complexe tel que :

et

6-3/ Angle de deux vecteurs et argument d'un complexe

Proposition 23

Soit et deux vecteurs non nuis d'affixes respectives et , et soit , , et des points du plan complexe d'affixes respectives , , et tels que et .

Alors le nombre complexe — a pour argument toute mesure de l'angle .

Ainsi :

1- et (argument de l'affixe

du vecteur).

2- $(-)$ et ———

Proposition 24

Soit et deux vecteurs non nuls d'affixes respectives et , et soit , , et des points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes respectives , , et . On a :

1- Les vecteurs et sont colinéaires si, et seulement si,
$(-)$ $(- \quad \mathbb{R})$

Et : ———

2- Les vecteurs et sont orthogonaux si, et seulement si,
$(-) \quad - \quad (- \quad \mathbb{R})$

Et : ——— –

3- Les points , , et sont alignés ou cocycliques (appartenant au même cercle) si, et seulement si : ——— ——— $\mathbb{R}$

6-4/ Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition 10

Pour tout réel , on note le nombre complexe de module et d’argument .

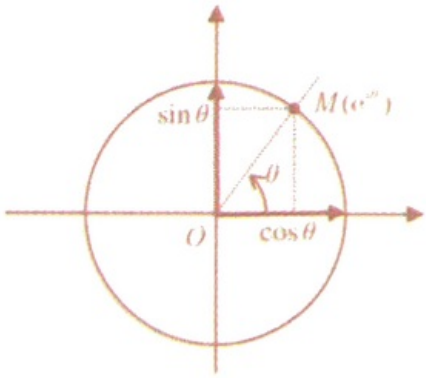
Autrement dit :

Remarques

D'après la définition 10, les nombres complexes de la forme (avec $\mathbb{R}$) sont les affixes des points du plan complexe situés sur le cercle trigonométrique, et inversement, tout point du cercle trigonométrique a une affixe de la forme (avec $\mathbb{R}$).

Par convention, on écrit pour tout $\mathbb{R}$:

Lorsque , alors on a ; ainsi, cette nouvelle définition est donc compatible avec la valeur que donne en la fonction exponentielle déjà connue sur $\mathbb{R}$.



Proposition 25

Soit et deux nombres réels. Alors :

( )

Définition 11

Soit un nombre complexe non nul de module et d'argument .

L'écriture est appelée la notation exponentielle ou l'écriture exponentielle du nombre .

Proposition 26

Pour tout réel et pour tout entier relatif , on a ( ) , ou encore, par définition de :

« Formule de Moivre »

Pour tout réel :

« Formules d'Euler »