



## Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 6-1-1 : Nombres complexes - Partie 1 (Cours)

**Professeur : Mr CHEDDADI Haitam**

### Sommaire

#### I- L'ensemble des nombres complexes

1-1/ Notion de nombre complexe

1-2/ Forme algébrique d'un nombre complexe

1-3/ Égalité de deux nombres complexes

#### II- Opérations sur les nombres complexes

2-1/ Addition et multiplication dans  $\mathbb{C}$

2-2/ Opposé d'un complexe - différence de deux complexes

2-3/ Inverse d'un nombre complexe non nul - quotient de deux nombres complexes

#### III- Représentation géométrique d'un nombre complexe

3-1/ Affixe d'un point - affixe d'un vecteur

3-2/ Interprétation géométrique de la somme, la différence et la multiplication par un réel

3-3/ Interprétation complexe de la linéarité, du parallélisme et du barycentre

#### IV- Conjugué d'un nombre complexe

4-1/ Définition et interprétation géométrique

4-2/ Propriétés du conjugué

#### V- Module d'un nombre complexe

5-1/ Définition et interprétation géométrique

5-2/ Propriétés du module

#### VI- Forme trigonométrique d'un complexe

6-1/ Argument d'un nombre complexe non nul

6-2/ Forme trigonométrique d'un nombre complexe

6-3/ Angle de deux vecteurs et argument d'un complexe

## 6-4/ Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

---

### I- L'ensemble des nombres complexes

#### 1-1/ Notion de nombre complexe

##### **Théorème 1**

Il existe un ensemble noté  $\mathbb{C}$  contenant  $\mathbb{R}$  :

- 1- muni d'une addition notée  $+$  et d'une multiplication notée  $\cdot$ , ou le plus souvent implicitement (c'est-à-dire sans symbole, comme dans  $\mathbb{R}$ ) possédant les mêmes propriétés comme dans  $\mathbb{R}$ .
- 2- possédant un élément noté  $i$  dont le carré vaut  $-1$  :  $i^2 = -1$ .
- 3- où tout élément  $z$ , appelé nombre complexe ou complexe, s'écrit de manière unique sous la forme  $z = x + iy$ , avec  $x$  et  $y$  réels.

##### **Remarques**

- On a :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
- Contrairement à  $\mathbb{R}$ , l'ensemble  $\mathbb{C}$  n'est usuellement muni d'aucune relation d'ordre, et nous ne pourrions donc pas dire qu'un nombre complexe est inférieur à un autre ou non plus qu'il est positif.
- Les nombres complexes  $x + iy$  et  $x + yi$  où  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  représentent le même nombre complexe.
- On a :  $\mathbb{C} = \{x + iy / (x; y) \in \mathbb{R}^2\}$

#### 1-2/ Forme algébrique d'un nombre complexe

##### **Définition 1**

Étant donné  $z \in \mathbb{C}$ , il existe un unique couple  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $z = x + iy$ .

L'écriture  $x + iy$  s'appelle la forme algébrique du nombre complexe  $z$ .

Le nombre  $x$  est la partie réelle de  $z$  notée  $Re(z)$ .

Le nombre  $y$  est la partie imaginaire de  $z$  notée  $Im(z)$ .

Un nombre complexe est réel lorsque sa partie imaginaire est nulle :

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0.$$

Un nombre complexe est dit imaginaire pur si sa partie réelle est nulle :

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0.$$

#### 1-3/ Égalité de deux nombres complexes

##### **Proposition 1**

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires.

En d'autres termes :

$$(\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2) \quad z = z' \Leftrightarrow (Re(z) = Re(z')) \text{ et } (Im(z) = Im(z'))$$

## Remarques

Le résultat de la proposition 1 est une conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.

Pour tout nombre complexe  $z$  :

$$(\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2) \quad z = z' \Leftrightarrow (Re(z) = Re(z')) \text{ et } (Im(z) = Im(z'))$$

## II- Opérations sur les nombres complexes

### 2-1/ Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

#### Proposition 2

Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes tels que :  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  avec  $(x; x'; y; y') \in \mathbb{R}^4$ .

On a :

$$1- z + z' = (x + x') + i(y + y') \text{ et } z \times z' = xx' - yy' + i(xy' + yx')$$

$$2- \text{ Pour tout } \lambda \in \mathbb{R} : \lambda z = \lambda x + i(\lambda y)$$

#### Remarques

Pour tout  $(z; z') \in \mathbb{C}^2$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{cases} Re(z + z') = Re(z) + Re(z') \\ Im(z + z') = Im(z) + Im(z') \\ Re(\lambda z) = \lambda Re(z) \\ Im(\lambda z) = \lambda Im(z) \end{cases}$$

Si  $k \in \mathbb{N}$ , alors  $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$ . Il en résulte donc :

$$i^{4k} = 1 ; \quad i^{4k+1} = i ; \quad i^{4k+2} = -1 ; \quad i^{4k+3} = -i$$

### 2-2/ Opposé d'un complexe - différence de deux complexes

#### Proposition 3

Tout nombre complexe  $z = x + iy$ , où  $x$  et  $y$  sont des réels, possède un opposé dans  $\mathbb{C}$  noté  $-z$ , qui est le nombre complexe  $-x - iy$ , et on écrit

$$-z = -x - iy.$$

Donc :

$$Re(-z) = -Re(z) \text{ et } Im(-z) = -Im(z)$$

#### Définition 2

La différence de deux nombres complexes  $z$  et  $z'$  est le nombre  $z - z' = z + (-z')$ .

#### Remarques

Si  $x, x', y$  et  $y'$  sont des nombres réels, alors :

$$(x + iy) - (x' + iy') = (x - x') + i(y - y')$$

Les identités remarquables vues dans  $\mathbb{R}$  restent aussi valables dans  $\mathbb{C}$ .

Ainsi, pour tous nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  on a :

$$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2$$

$$(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2$$

$$(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = z_1^2 - z_2^2$$

En particulier, on a les égalités suivantes, valables pour tout  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  :

$$(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$$

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 - b^2$$

On a aussi :

$$(z_1 + z_2)^3 = z_1^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3$$

$$(z_1 - z_2)^3 = z_1^3 - 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 - z_2^3$$

$$z_1^3 - z_2^3 = (z_1 - z_2)(z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2)$$

$$z_1^3 + z_2^3 = (z_1 + z_2)(z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2)$$

Et de façon générale, on a pour tout  $(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p \cdot z_1^p \cdot z_2^{n-p} = \sum_{q=0}^n C_n^q \cdot z_2^q \cdot z_1^{n-q} \text{ (Formule du binôme de Newton)}$$

$$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2)(z_1^{n-1} - z_1^{n-2}z_2 + \dots + z_1z_2^{n-2} + z_2^{n-1})$$

$$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2) \left( \sum_{k=0}^{n-1} z_1^{n-k-1} z_2^k \right)$$

Un produit de nombres complexes est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

En particulier :

$$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2 \quad [z \times z' = 0 \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } z' = 0)]$$

## 2-3/ Inverse d'un nombre complexe non nul - quotient de deux nombres complexes

### Proposition 4

Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe non nul tels que  $(x; y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

L'inverse du nombre  $z$  est le nombre complexe noté  $\frac{1}{z}$  ou  $z^{-1}$  tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x^2+y^2} (x - iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$$

### Proposition 5

Soit  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  deux complexes où  $x, x', y$  et  $y'$  des réels tels que  $(x; y) \neq (0; 0)$ .

Le quotient de  $z'$  par  $z$  est le nombre complexe noté  $\frac{z'}{z}$  tel que  $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$ , et on a :

$$\frac{z'}{z} = \frac{x'+iy'}{x+iy} = \frac{xx'+yy'}{x^2+y^2} + i \frac{xy'-yx'}{x^2+y^2}$$

### III- Représentation géométrique d'un nombre complexe

#### 3-1/ Affixe d'un point - affixe d'un vecteur

##### Définition 3

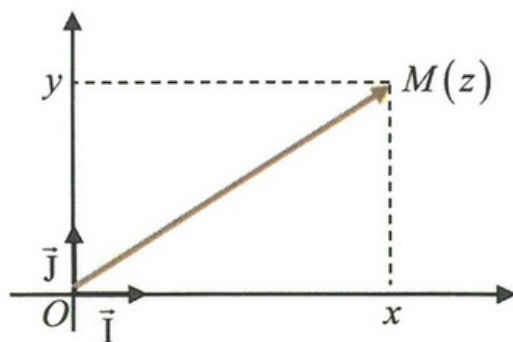
Le plan  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{I}, \vec{J})$ .

Soit  $z = x + iy$  où  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  un nombre complexe.

L'unique point  $M$ , de coordonnées  $(x; y)$  dans  $(O; \vec{I}, \vec{J})$ , est appelé l'image du complexe  $z$ , et on écrit  $M(z)$ .

Soit  $M$  un point, de coordonnées  $(x; y)$  dans  $(O; \vec{I}, \vec{J})$ .

Le nombre complexe  $z = x + iy$  est appelé l'affixe du point  $M$ . On le note  $Aff(M)$  ou  $z_M$ .



##### Remarques

Le plan  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{I}, \vec{J})$ .

À partir de la définition 3, on peut identifier l'ensemble au plan de la façon suivante :

- À tout nombre complexe  $z = x + iy$  on associe le point  $M(x; y)$ .
- À tout point  $M(x; y)$  du plan  $\mathcal{P}$  on associe le nombre complexe  $z = x + iy$ .

Ainsi, l'application  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{P}$

$z \rightarrow M(z)$  est une bijection. Sa bijection réciproque est :  $f^{-1} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$

$M \rightarrow Aff(M)$

Le plan  $\mathcal{P}$  est appelé alors le plan complexe, et on a :

$$(\forall (M; N) \in \mathcal{P}^2) (Aff(M) = Aff(N) \Leftrightarrow M = N)$$

Tout point de l'axe des abscisses est l'image d'un nombre réel, c'est pourquoi l'axe des abscisses

s'appelle l'axe réel. On a alors :  $M(z) \in (O; \vec{I}) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Tout point  $B(0; b)$  de l'axe des ordonnées est l'image d'un nombre imaginaire pur ( $Aff(B) = bi$ ), c'est pourquoi l'axe des ordonnées s'appelle l'axe

imaginaire. On a alors :  $M(z) \in (O; \vec{J}) \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

#### Définition 4

Le plan  $\mathcal{P}$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{I}, \vec{J})$ .

Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe où .

Le vecteur  $\vec{u} = x \cdot \vec{I} + y \cdot \vec{J}$  est appelé image du complexe  $z$ , et on écrit  $\vec{u}(z)$  .

De même, le nombre  $z$  est appelé affixe du vecteur  $\vec{u}$ , et on écrit  $Aff(\vec{u}) = z$  ou parfois  $z_{\vec{u}} = z$ .

#### Remarques

Soit  $z$  un nombre complexe.

On a :  $z = Aff(M) \Leftrightarrow z = Aff(\vec{OM})$

Soit  $\mathcal{V}_2$  l'ensemble des vecteurs du plan.

L'application  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{V}_2$

$z \mapsto \vec{u}(z)$  est une bijection de  $\mathbb{C}$  vers  $\mathcal{V}_2$ , et on a :

$$\left( \forall \left( \vec{u}; \vec{v} \right) \in \mathcal{V}_2^2 \right) \left( \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow Aff(\vec{u}) = Aff(\vec{v}) \right)$$

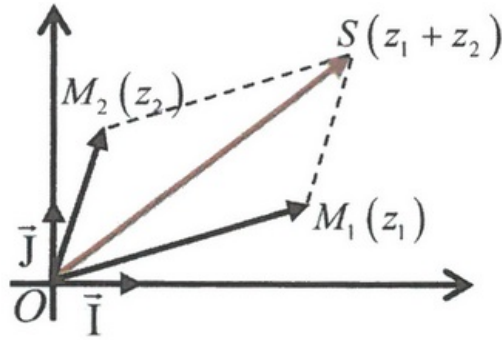
### 3-2/ Interprétation géométrique de la somme, la différence et la multiplication par un réel

#### Proposition 6

Si  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont deux vecteurs du plan d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$ , alors l'affixe du vecteur  $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$  est  $z_1 + z_2$ .

En d'autres termes :  $Aff(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = Aff(\vec{v}_1) + Aff(\vec{v}_2)$ .

Si  $M_1$  et  $M_2$  sont les images respectives des affixes  $z_1$  et  $z_2$ , alors l'image du nombre  $z_1 + z_2$  est le point  $S$  tel que :  $\vec{OS} = \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2$  (C'est-à-dire  $OM_1SM_2$  est un parallélogramme).



## Remarques

Soit  $z$  un nombre complexe et  $\vec{u}(z)$  et  $\vec{v}(-z)$  deux vecteurs du plan.

On sait que  $\text{Aff}\left(\vec{0}\right) = 0$  et  $z + (-z) = 0$ , donc d'après la proposition 6, on en déduit que  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ .

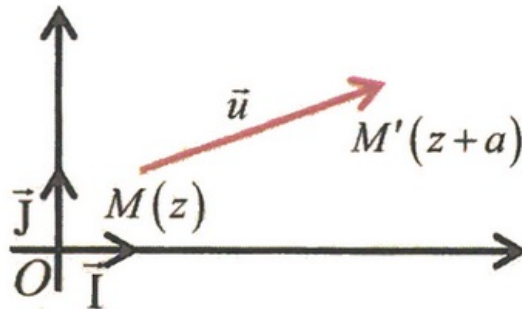
Ainsi  $\vec{v} = -\vec{u}$  et alors :  $\text{Aff}(-\vec{u}) = -\text{Aff}(\vec{u})$ .

Soit  $M(z)$  et  $M'(-z)$ . Comme  $O(0)$  et  $z + (-z) = 0$ , alors  $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$ , et par suite  $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$ .

Ainsi, le point  $M'(-z)$  est le symétrique de point  $M(z)$  par rapport à  $O$ .

On peut aussi interpréter géométriquement l'addition de la manière suivante :

Étant donné un vecteur  $\vec{u}$  d'affixe  $a$ , la translation de vecteur  $\vec{u}$  transforme le point  $M$  d'affixe  $z$ , en le point  $M'$  d'affixe  $z' = z + a$ .

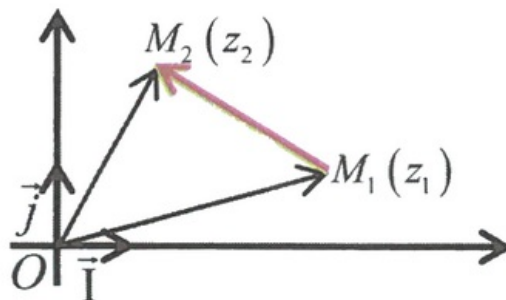


## Proposition 7

Soit  $M_1(z_1)$  et  $M_2(z_2)$  deux points du plan complexe.

Alors l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{M_1M_2}$  est  $z_2 - z_1$ .

En d'autres termes :  $\text{Aff}\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right) = \text{Aff}(M_2) - \text{Aff}(M_1)$

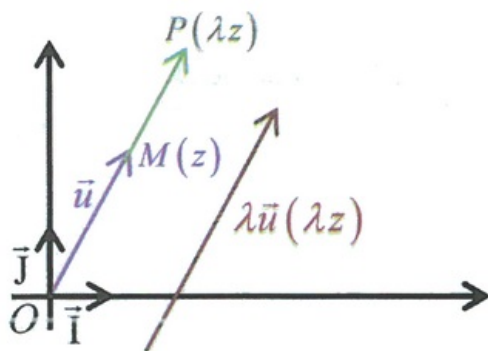


### Proposition 8

Si  $\vec{u}$  est un vecteur d'affixe  $z$  et  $\lambda$  un nombre réel, alors l'affixe du vecteur  $\lambda \vec{u}$  est  $\lambda z$ .

En d'autres termes :  $Aff(\lambda \vec{u}) = \lambda \cdot Aff(\vec{u})$

Si  $M(z)$  est un point du plan, alors l'image du nombre complexe  $\lambda z$  est le point  $P$  défini par :  $\vec{OP} = \lambda \vec{OM}$ .



### Remarque

A l'aide des propositions 6 et 8, on peut établir le résultat suivant :

Si  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont deux vecteurs du plan, alors pour tout  $(\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ , on a :

$$Aff(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 Aff(\vec{v}_1) + \lambda_2 Aff(\vec{v}_2)$$

## 3-3/ Interprétation complexe de la linéarité, du parallélisme et du barycentre

### Proposition 9

Soient  $A, B$  et  $C$  des points deux à deux distincts d'affixes respectives  $z_A, z_B$  et  $z_C$ .

Les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés si et seulement si :  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

### Proposition 10

Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points du plan d'affixes respectives  $z_A, z_B, z_C$  et  $z_D$  tels que  $A \neq B$  et  $C \neq D$ .

Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si et seulement si :  $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

### Proposition 11



Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan d'affixes respectives  $z_A$  et  $z_B$ , et soit  $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\alpha + \beta \neq 0$ .

L'affixe du barycentre  $G$  du système pondéré  $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$  est le complexe :  

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$$

### Remarques

Si  $A(z_A)$  et  $B(z_B)$  alors l'affixe du milieu  $I$  du segment  $[AB]$  est le nombre complexe  $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ .

En fait ceci n'est rien qu'un cas particulier du barycentre où les « poids » sont égaux.

On peut généraliser le résultat de la proposition 11 pour le barycentre de plus de deux points.

Plus précisément : si  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  des réels tels que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$ , alors le barycentre  $G$  du système pondéré  $\{(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \dots, (A_n; \alpha_n)\}$  a pour affixe :

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \dots + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

## IV- Conjugué d'un nombre complexe

### 4-1/ Définition et interprétation géométrique

#### Définition 5

Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe avec  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ .

On appelle conjugué de  $z$  le nombre complexe  $x - iy$ , noté  $\overline{z}$ , et on écrit :  
 $\overline{\overline{z}} = x + iy = z$

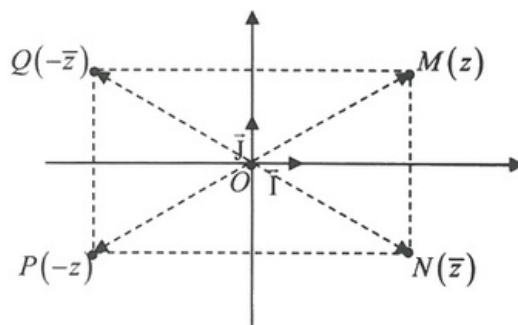
On a alors:  $\overline{z} = \text{Re}(z) - i\text{Im}(z)$  et  $\overline{\overline{z}} = z$

#### Interprétation géométrique de la conjugaison

Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe avec  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ .

La symétrie par rapport à l'axe des abscisses transforme le point  $M(x; y)$  en  $N(x; -y)$ , d'affixe  $\text{Aff}(N) = \overline{\text{Aff}(M)}$ .

La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées transforme le point  $M(x; y)$  en  $Q(-x; y)$ , d'affixe  $\text{Aff}(Q) = -\overline{\text{Aff}(M)}$ .



## 4-2/ Propriétés du conjugué

### Proposition 12

Étant donné  $z \in \mathbb{C}$ , on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \\ z \cdot \overline{z} &= (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{z} = z \\ z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{z} = -z \end{aligned}$$

### Remarque

En pratique, pour éliminer les complexes du dénominateur d'une fraction, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

### Proposition 13

Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes.

On a alors les propriétés suivantes :

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$  et  $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :  $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$
- Si  $z \neq 0$ , alors  $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$  et  $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$
- Si  $z \neq 0$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , alors  $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

### Remarques

1- Soit  $n \geq 2$ , et  $z_1, z_2, \dots, z_n$  des nombres complexes. Alors :

$$\overline{\sum_{k=1}^n z_k} = \sum_{k=1}^n \overline{z_k} \quad \text{et} \quad \overline{\prod_{k=1}^n z_k} = \prod_{k=1}^n \overline{z_k}$$

2- Soit  $P(z)$  un polynôme dans  $\mathbb{C}$  à coefficients réels :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

(les nombres  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont alors réels). On a alors pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\begin{aligned} \overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ \overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \end{aligned}$$

Puisque pour tout entier  $k$  compris entre 1 et  $n$  (au sens large) :  $\overline{a_k} = a_k$  et  $\overline{z^k} = (\overline{z})^k$

$$\text{Alors } \overline{P(z)} = a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 = P(\overline{z}).$$

En particulier, si  $\alpha$  est racine du polynôme  $P$  (c'est-à-dire  $P(\alpha) = 0$ ), alors  $\overline{\alpha}$  est aussi racine de  $P$  car :  $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0$

On obtient alors le résultat important suivant :

« Si  $\alpha$  est racine d'un polynôme à coefficients réels, alors  $\overline{\alpha}$  est aussi racine de ce polynôme »

## V- Module d'un nombre complexe

### 5-1/ Définition et interprétation géométrique

#### Définition 6

Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe avec  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ .

Le module de  $z$  est le réel positif noté  $|z|$  défini par :  $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

On a alors :  $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}$

#### Remarques

La notion de module prolonge celle de la valeur absolue, c'est-à-dire que le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.

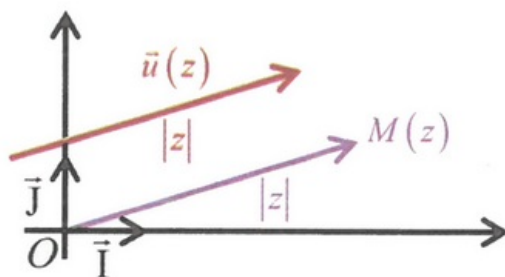
On a pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :  $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$  et  $|z| = |\overline{z}|$ . Si  $z \neq 0$  alors :  $\overline{z} = \frac{|z|^2}{z}$

#### Interprétation géométrique du module

Étant donné  $z \in \mathbb{C}$ , d'image  $M$ , le module de  $z$  est la distance  $OM$  :

$$|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM$$

Si  $\vec{u}$  est un vecteur d'affixe  $z$ , alors :  $|z| = \|\vec{u}\|$



#### Proposition 14

La distance entre deux points  $A$  et  $B$ , d'affixes respectives  $a$  et  $b$ , est :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |b - a|$$

#### Proposition 15

Soit  $a$  un nombre complexe et  $r$  un réel strictement positif. On note  $A$  l'image de  $a$ .

L'ensemble des images  $M(z)$  des nombres complexes  $z$  tels que :

- $|z - a| = r$  est le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $A$  et de rayon  $r$ .
- $|z - a| \leq r$  est le disque fermé  $\mathcal{D}$  de centre  $A$  et de rayon  $r$ .
- $|z - a| < r$  est le disque ouvert  $\Delta$  de centre  $A$  et de rayon  $r$ .

### 5-2/ Propriétés du module

#### Proposition 16

Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

- $|z| \geq 0$  et  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$  et  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$  et  $|z - z'| = 0 \Leftrightarrow z = z'$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$

Si  $z \neq 0$  et  $n \in \mathbb{Z}$  alors :  $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$  et  $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$  et  $|z^n| = |z|^n$

### Remarque

Si  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2, et  $z_1, z_2, \dots, z_n$  des nombres complexes, alors :

$$|\prod_{k=1}^n z_k| = \prod_{k=1}^n |z_k|$$

### Proposition 17

Étant donné deux nombres complexes  $z$  et  $z'$ , on a :  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

C'est l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes.

## VI- Forme trigonométrique d'un complexe

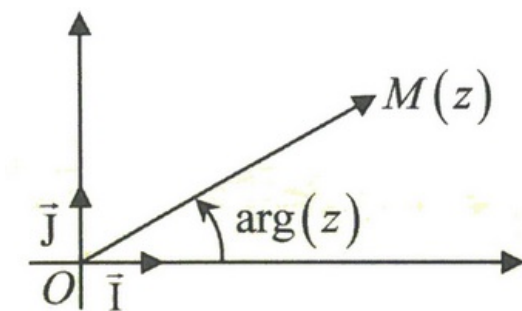
### 6-1/ Argument d'un nombre complexe non nul

#### Définition 7

Soit  $z$  un nombre complexe non nul, d'image  $M$  dans le plan complexe  $\mathcal{P}$ .

Toute mesure  $\theta$  de l'angle orienté  $\left(\overrightarrow{I}; \widehat{OM}\right)$  s'appelle un argument de  $z$ .

On le note  $\arg(z)$  et on écrit :  $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$



#### Remarques

Soit  $z$  un nombre complexe non nul.

Si  $\theta$  est un argument du nombre complexe  $z$ , alors tout nombre réel de la forme  $\theta + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  est aussi un argument de  $z$ .

Dans la pratique, on prend souvent  $\theta$  dans l'intervalle  $] -\pi, \pi]$ , c'est-à-dire la

mesure principale de l'angle  $\left(\overrightarrow{I}; \widehat{OM}\right)$ .

Le nombre 0 est l'unique nombre complexe qui n'a pas d'argument.

## 6-2/ Forme trigonométrique d'un nombre complexe

### Proposition 18

Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe non nul avec  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  et  $\theta$  un argument de  $z$ .

Alors  $x = |z| \cos \theta$  et  $y = |z| \sin \theta$ .

Tout nombre complexe non nul  $z$  s'écrit de manière unique sous la forme  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ , où  $\theta$  est un argument de  $z$ .

### Définition 8

Soit  $z$  un nombre complexe non nul et  $\theta$  un argument de  $z$ .

L'écriture  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$  est appelée une écriture trigonométrique ou forme trigonométrique du nombre complexe  $z$ .

Notation simplifiée :  $z = [|z|; \theta]$

### Remarque

Tout nombre complexe non nul admet une infinité de formes trigonométriques.

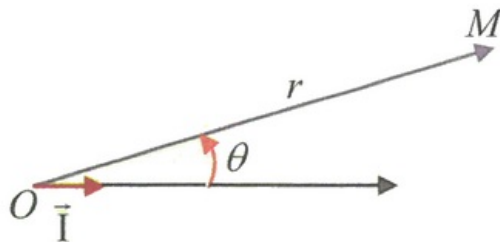
Si  $z \in \mathbb{C}^*$  alors :  $z = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$

### Définition 9

Soit  $z$  un nombre complexe non nul et  $M$  son image dans le plan complexe.

On pose  $r = OM$  et  $\theta$  une mesure de l'angle  $\left(\vec{I}; \overrightarrow{OM}\right)$  ( $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$ ).

Le couple  $(r; \theta)$  est appelé le couple des coordonnées polaires du point  $M$  par rapport à l'axe polaire  $\left(O; \vec{I}\right)$ . Le point  $O$  est le pôle



### Proposition 19

Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ .

Si  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  tel que  $r \in \mathbb{R}^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ , alors :  $|z| = r$  et  $\theta \equiv \arg(z) [2\pi]$

### Proposition 20

Soit  $z$  un nombre complexe non nul.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z \in \mathbb{R}^* &\Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0 [2\pi] \\
z \in \mathbb{R}_+^* &\Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0 [2\pi] \\
z \in \mathbb{R}_-^* &\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi [2\pi] \\
z \in i\mathbb{R}^* &\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\
z \in i\mathbb{R}_+^* &\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\
z \in i\mathbb{R}_-^* &\Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]
\end{aligned}$$

## Remarques

1- Les propositions 18 et 19 nous indiquent que toute écriture du genre  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$  avec  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$  est une forme géométrique d'un nombre complexe de module  $r$  et d'argument  $\theta$ .

2- La proposition 20 nous facilite la détermination d'une forme trigonométrique d'un nombre réel ou imaginaire pur. En effet, si  $x$  est un nombre réel strictement positif, alors :

3- La détermination d'une écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul  $z$  est équivalente à la détermination de son module et d'un de ces arguments. Pratiquement :

Si  $z = x + iy$  avec  $(x; y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  alors  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , et donc :

$$\frac{z}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Et si  $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$  alors  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ , et donc :

$$\frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Par conséquent :  $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  et  $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Ainsi, la connaissance de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  permet la détermination d'un argument de  $z$ . (On pourra utiliser les boutons  $\cos^{-1}$  et  $\sin^{-1}$  de la calculatrice).

4- Si  $z = \lambda(\cos \theta + i \sin \theta)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$  alors  $|z| = -\lambda$ . Par suite :

$z = |\lambda|(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi))$  est une forme trigonométrique du nombre  $z$ .

## Proposition 21

Pour des nombres complexes non nuls  $z$  et  $z'$ , on a :

$$\begin{aligned}
z' = z &\Leftrightarrow (|z'| = |z| \text{ et } \arg(z') \equiv \arg(z) [2\pi]) \\
z' = \overline{z} &\Leftrightarrow (|z'| = |z| \text{ et } \arg(z') \equiv -\arg(z) [2\pi]) \\
z' = -z &\Leftrightarrow (|z'| = |z| \text{ et } \arg(z') \equiv \pi + \arg(z) [2\pi])
\end{aligned}$$

## Corollaire

Soit  $z$  un nombre complexe non nul.

Si  $z = [r, \theta]$  alors :  $\overline{z} = [r, -\theta]$  et  $-z = [r, \pi + \theta]$ .

En particulier, on a :  $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$  et  $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$

## Proposition 22

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes non nuls tels que  $z = [r, \theta]$  et  $z' = [r', \theta']$

On a les relations suivantes :

- 1  $zz' = [rr', \theta + \theta']$  et  $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
- 2  $\frac{1}{z} = [\frac{1}{r}, -\theta]$  et  $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$
- 3  $\frac{z}{z'} = [\frac{r}{r'}, \theta - \theta']$  et  $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$
- 4  $(\forall n \in \mathbb{Z}) z^n = [r^n, n\theta]$  et  $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) [2\pi]$

## Remarques

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2, et  $z_1, z_2, \dots, z_n$  des nombres complexes non nuls. Alors :

$$\arg\left(\prod_{k=1}^n z_k\right) = \sum_{k=1}^n \arg(z_k) [2\pi]$$

Si  $z_1$  et  $z_2$  sont deux nombres complexes non nuls tels que  $z_1 + z_2 \neq 0$ , alors on n'a pas en général  $\arg(z_1 + z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$ .

Contre-exemple :

$$\arg(1) + \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ et } \arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ et } \frac{\pi}{2} \not\equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes non nuls, et soit  $M$  et  $M'$  leurs images respectives dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{I}; \vec{J})$

À partir de la proposition 22, on peut déduire que le point  $P(z, z')$  est le point du plan complexe tel que :

$$OP = OM \times OM' \text{ et } \left(\widehat{\vec{I}; \vec{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{I}; \vec{OM}}\right) + \left(\widehat{\vec{I}; \vec{OM'}}\right) [2\pi]$$

## 6-3/ Angle de deux vecteurs et argument d'un complexe

### Proposition 23

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ , et soit  $A, B, C$  et  $D$  des points du plan complexe d'affixes respectives  $z_A, z_B, z_C$  et  $z_D$  tels que  $A \neq B$  et  $C \neq D$ .

Alors le nombre complexe  $\frac{z'}{z}$  a pour argument toute mesure de l'angle  $\left(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}\right)$

. Ainsi :

$$1- \left(\widehat{\vec{I}; \vec{u}}\right) \equiv \arg(z) [2\pi] \text{ et } \left(\widehat{\vec{I}; \vec{AB}}\right) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi] \text{ (argument de$$

l'affixe du vecteur  $\vec{AB}$ ).

$$2- \left(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z'}{z}\right) [2\pi] \text{ et } \left(\widehat{\vec{AB}; \vec{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$$

## Proposition 24

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ , et soit  $A, B, C$  et  $D$  des points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes respectives  $z_A, z_B, z_C$  et  $z_D$ . On a :

1- Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si, et seulement si,  
 $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv 0 [\pi] \quad \left(\frac{z'}{z} \in \mathbb{R}\right)$

Et :  $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [2\pi]$

2- Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si, et seulement si,  
 $\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \quad \left(\frac{z'}{z} \in i\mathbb{R}\right)$

Et :  $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

3- Les points  $A, B, C$  et  $D$  sont alignés ou cocycliques (appartenant au même cercle) si, et seulement si :  $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D}\right) \in \mathbb{R}$

## 6-4/ Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

### Définition 10

Pour tout réel  $\theta$ , on note  $e^{i\theta}$  le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\theta$ .

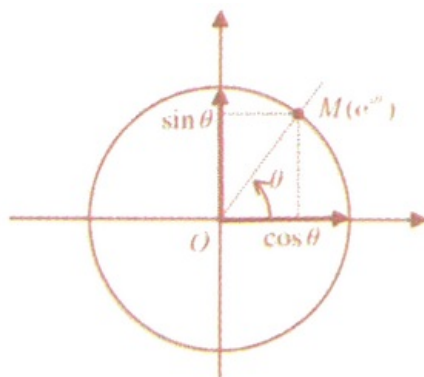
Autrement dit :  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

### Remarques

D'après la définition 10, les nombres complexes de la forme  $e^{i\theta}$  (avec  $\theta \in \mathbb{R}$ ) sont les affixes des points du plan complexe situés sur le cercle trigonométrique, et inversement, tout point du cercle trigonométrique a une affixe de la forme  $e^{i\theta}$  (avec  $\theta \in \mathbb{R}$ ).

Par convention, on écrit pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  :  $e^{i(-\theta)} = e^{i\theta}$

Lorsque  $\theta = 0$ , alors on a  $e^{i\theta} = 1$  ; ainsi, cette nouvelle définition est donc compatible avec la valeur que donne en 0 la fonction exponentielle déjà connue sur  $\mathbb{R}$ .



## Proposition 25

Soit  $\theta$  et  $\theta'$  deux nombres réels. Alors :



$$\begin{array}{ll}
1 & |e^{i\theta}| = 1 \text{ et } \arg(e^{i\theta}) \equiv \theta \pmod{2\pi} \\
2 & e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \\
3 & e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta \\
4 & \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \\
5 & e^{i(\theta)} = e^{i(\theta')} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' \pmod{2\pi} \\
6 & -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}
\end{array}$$

### Définition 11

Soit  $z$  un nombre complexe non nul de module  $r$  et d'argument  $\theta$ .

L'écriture  $z = re^{i\theta}$  est appelée la notation exponentielle ou l'écriture exponentielle du nombre  $z$ .

### Proposition 26

Pour tout réel  $\theta$  et pour tout entier relatif  $n$ , on a  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ , ou encore, par définition de  $e^{i\theta}$  :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

« Formule de Moivre »

Pour tout réel  $\theta$  :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

« Formules d'Euler »