

Sommaire**I- L'ensemble des nombres complexes**

1-1/ Notion de nombre complexe

1-2/ Forme algébrique d'un nombre complexe

1-3/ Égalité de deux nombres complexes

II- Opérations sur les nombres complexes2-1/ Addition et multiplication dans \mathbb{C}

2-2/ Opposé d'un complexe - différence de deux complexes

2-3/ Inverse d'un nombre complexe non nul - quotient de deux nombres complexes

III- Représentation géométrique d'un nombre complexe

3-1/ Affixe d'un point - affixe d'un vecteur

3-2/ Interprétation géométrique de la somme, la différence et la multiplication par un réel

3-3/ Interprétation complexe de la linéarité, du parallélisme et du barycentre

IV- Conjugué d'un nombre complexe

4-1/ Définition et interprétation géométrique

4-2/ Propriétés du conjugué

V- Module d'un nombre complexe

5-1/ Définition et interprétation géométrique

5-2/ Propriétés du module

VI- Forme trigonométrique d'un complexe

6-1/ Argument d'un nombre complexe non nul

6-2/ Forme trigonométrique d'un nombre complexe

6-3/ Angle de deux vecteurs et argument d'un complexe

6-4/ Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

I- L'ensemble des nombres complexes

1-1/ Notion de nombre complexe

Théorème 1

Il existe un ensemble noté \mathbb{C} contenant \mathbb{R} :

- 1- muni d'une addition notée $+$ et d'une multiplication notée x , ou le plus souvent implicitement (c'est-à-dire sans symbole, comme dans \mathbb{R}) possédant les mêmes propriétés comme dans \mathbb{R} .
- 2- possédant un élément noté i dont le carré vaut $-1 : i^2 = -1$.
- 3- où tout élément z , appelé nombre complexe ou complexe, s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$, avec x et y réels.

Remarques

- On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
- Contrairement à \mathbb{R} , l'ensemble \mathbb{C} n'est usuellement muni d'aucune relation d'ordre, et nous ne pourrons donc pas dire qu'un nombre complexe est inférieur à un autre ou non plus qu'il est positif.
- Les nombres complexes $x + iy$ et $x + yi$ où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ représentent le même nombre complexe.
- On a : $\mathbb{C} = \{x + iy / (x; y) \in \mathbb{R}^2\}$

1-2/ Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1

Étant donné $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$.

L'écriture $x + iy$ s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z .

Le nombre x est la partie réelle de z notée $Re(z)$.

Le nombre y est la partie imaginaire de z notée $Im(z)$.

Un nombre complexe est réel lorsque sa partie imaginaire est nulle :

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$.

Un nombre complexe est dit imaginaire pur si sa partie réelle est nulle :

$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0$.

1-3/ Égalité de deux nombres complexes

Proposition 1

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires.

En d'autres termes :

$$(\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2) \ z = z' \Leftrightarrow (Re(z) = Re(z')) \text{ et } (Im(z) = Im(z'))$$

Remarques

Le résultat de la proposition 1 est une conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.

Pour tout nombre complexe z :

$$(\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2) \ z = z' \Leftrightarrow (Re(z) = Re(z')) \text{ et } (Im(z) = Im(z'))$$

II- Opérations sur les nombres complexes

2-1/ Addition et multiplication dans \mathbb{C}

Proposition 2

Soit z et z' deux nombres complexes tels que : $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $(x; x'; y; y') \in \mathbb{R}^4$.

On a :

$$1- z + z' = (x + x') + i(y + y') \text{ et } z \times z' = xx' - yy' + i(xy' + yx')$$

$$2- \text{Pour tout } \lambda \in \mathbb{R} : \lambda z = \lambda x + i(\lambda y)$$

Remarques

Pour tout $(z; z') \in \mathbb{C}^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} Re(z + z') = Re(z) + Re(z') \\ Im(z + z') = Im(z) + Im(z') \\ \begin{cases} Re(\lambda z) = \lambda Re(z) \\ Im(\lambda z) = \lambda Im(z) \end{cases} \end{cases}$$

Si $k \in \mathbb{N}$, alors $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$. Il en résulte donc :

$$i^{4k} = 1 ; \quad i^{4k+1} = i ; \quad i^{4k+2} = -1 ; \quad i^{4k+3} = -i$$

2-2/ Opposé d'un complexe - différence de deux complexes

Proposition 3

Tout nombre complexe $z = x + iy$, où x et y sont des réels, possède un opposé dans \mathbb{C} noté $-z$, qui est le nombre complexe $-x - iy$, et on écrit

$$-z = -x - iy.$$

Donc :

$$Re(-z) = -Re(z) \text{ et } Im(-z) = -Im(z)$$

Définition 2

La différence de deux nombres complexes z et z' est le nombre $z - z' = z + (-z')$.

Remarques

Si x, x', y et y' sont des nombres réels, alors :

$$(x + iy) - (x' + iy') = (x - x') + i(y - y')$$

Les identités remarquables vues dans \mathbb{R} restent aussi valables dans \mathbb{C} .

Ainsi, pour tous nombres complexes z_1 et z_2 on a :

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2)^2 &= z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2 \\ (z_1 - z_2)^2 &= z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2 \\ (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) &= z_1^2 - z_2^2\end{aligned}$$

En particulier, on a les égalités suivantes, valables pour tout $(a; b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}(a + ib)^2 &= a^2 - b^2 + 2abi \\ (a - ib)^2 &= a^2 - b^2 - 2abi \\ (a + ib)(a - ib) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2)^3 &= z_1^3 + 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 + z_2^3 \\ (z_1 + z_2)^3 &= z_1^3 - 3z_1^2z_2 + 3z_1z_2^2 - z_2^3 \\ z_1^3 - z_2^3 &= (z_1 - z_2)(z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2) \\ z_1^3 + z_2^3 &= (z_1 + z_2)(z_1^2 - z_1z_2 + z_2^2)\end{aligned}$$

Et de façon générale, on a pour tout $(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p \cdot z_1^p \cdot z_2^{n-p} = \sum_{q=0}^n C_n^q \cdot z_2^q \cdot z_1^{n-q} \quad (\text{Formule du binôme de Newton})$$

$$\begin{aligned}z_1^n - z_2^n &= (z_1 - z_2)(z_1^{n-1} - z_1^{n-2}z_2 + \dots + z_1z_2^{n-2} + z_2^{n-1}) \\ z_1^n - z_2^n &= (z_1 - z_2) \left(\sum_{k=0}^{n-1} z_1^{n-k-1} z_2^k \right)\end{aligned}$$

Un produit de nombres complexes est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

En particulier :

$$\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2 \quad [z \times z' = 0 \Leftrightarrow (z = 0 \text{ ou } z' = 0)]$$

2-3/ Inverse d'un nombre complexe non nul - quotient de deux nombres complexes

Proposition 4

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul tels que $(x; y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

L'inverse du nombre z est le nombre complexe noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1} tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x^2+y^2} (x - iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$$

Proposition 5

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux complexes où x, x', y et y' des réels tels que $(x; y) \neq (0; 0)$.

Le quotient de z' par z est le nombre complexe noté $\frac{z'}{z}$ tel que $\frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z}$, et on a :

$$\frac{z'}{z} = \frac{x'+iy'}{x+iy} = \frac{xx'+yy'}{x^2+y^2} + i \frac{xy'-yx'}{x^2+y^2}$$

III- Représentation géométrique d'un nombre complexe

3-1/ Affixe d'un point - affixe d'un vecteur

Définition 3

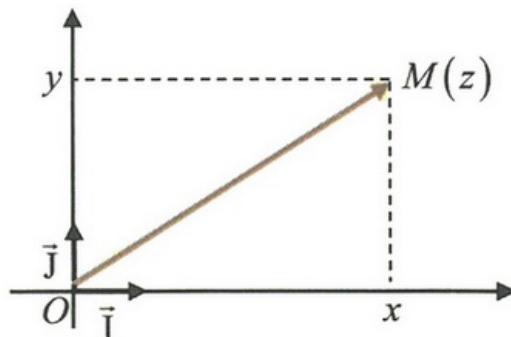
Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{I}, \vec{J})$.

Soit $z = x + iy$ où $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe.

L'unique point M , de coordonnées $(x; y)$ dans $(O; \vec{I}, \vec{J})$, est appelé l'image du complexe z , et on écrit $M(z)$.

Soit M un point, de coordonnées $(x; y)$ dans $(O; \vec{I}, \vec{J})$.

Le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé l'affixe du point M . On le note $Aff(M)$ ou z_M .



Remarques

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{I}, \vec{J})$.

À partir de la définition 3, on peut identifier l'ensemble au plan de la façon suivante :

- À tout nombre complexe $z = x + iy$ on associe le point $M(x; y)$.
- À tout point $M(x; y)$ du plan \mathcal{P} on associe le nombre complexe $z = x + iy$.

Ainsi, l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{P}$

$z \rightarrow M(z)$ est une bijection. Sa bijection réciproque est : $f^{-1} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$
 $M \rightarrow Aff(M)$

Le plan \mathcal{P} est appelé alors le plan complexe, et on a :

$$(\forall (M; N) \in \mathcal{P}^2) \quad (Aff(M) = Aff(N) \Leftrightarrow M = N)$$

Tout point de l'axe des abscisses est l'image d'un nombre réel, c'est pourquoi l'axe des abscisses

s'appelle l'axe réel. On a alors : $M(z) \in \left(O; \overrightarrow{I}\right) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Tout point $B(0; b)$ de l'axe des ordonnées est l'image d'un nombre imaginaire pur ($Aff(B) = bi$), c'est pourquoi l'axe des ordonnées s'appelle l'axe

imaginaire. On a alors : $M(z) \in \left(O; \overrightarrow{J}\right) \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

Définition 4

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$.

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe où .

Le vecteur $\overrightarrow{u} = x \cdot \overrightarrow{I} + y \cdot \overrightarrow{J}$ est appelé image du complexe z , et on écrit $\overrightarrow{u}(z)$

De même, le nombre z est appelé affixe du vecteur \overrightarrow{u} , et on écrit

$Aff(\overrightarrow{u}) = z$ ou parfois $z_{\overrightarrow{u}} = z$.

Remarques

Soit z un nombre complexe.

On a : $z = Aff(M) \Leftrightarrow z = Aff(\overrightarrow{OM})$

Soit \mathcal{V}_2 l'ensemble des vecteurs du plan.

L'application $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{V}_2$

$z \mapsto \overrightarrow{w}(z)$ est une bijection de \mathbb{C} vers \mathcal{V}_2 , et on a :

$$\left(\forall (\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) \in \mathcal{V}_2^2\right) \left(\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow Aff(\overrightarrow{u}) = Aff(\overrightarrow{v})\right)$$

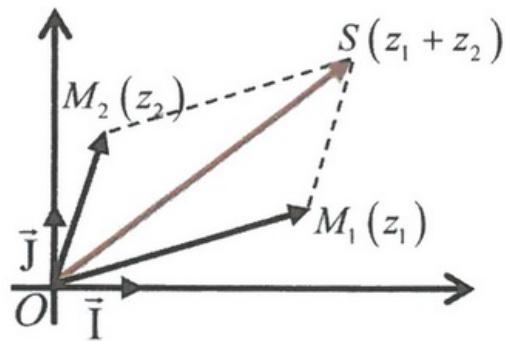
3-2/ Interprétation géométrique de la somme, la différence et la multiplication par un réel

Proposition 6

Si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs du plan d'affixes respectives z_1 et z_2 , alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ est $z_1 + z_2$.

En d'autres termes : $Aff(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = Aff(\overrightarrow{v_1}) + Aff(\overrightarrow{v_2})$.

Si M_1 et M_2 sont les images respectives des affixes z_1 et z_2 , alors l'image du nombre $z_1 + z_2$ est le point S tel que : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ (C'est-à-dire OM_1SM_2 est un parallélogramme).



Remarques

Soit z un nombre complexe et $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(-z)$ deux vecteurs du plan.

On sait que $Aff(\vec{0}) = 0$ et $z + (-z) = 0$, donc d'après la proposition 6, on en déduit que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.

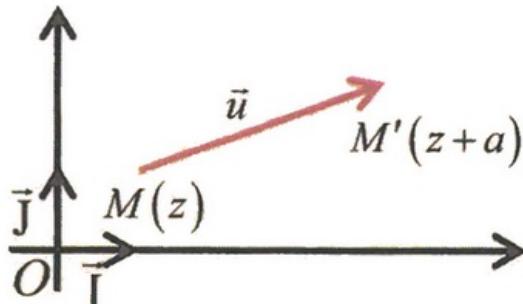
Ainsi $\vec{v} = -\vec{u}$ et alors : $Aff(-\vec{u}) = -Aff(\vec{u})$.

Soit $M(z)$ et $M'(-z)$. Comme $O(0)$ et $z + (-z) = 0$, alors $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$, et par suite $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

Ainsi, le point $M'(-z)$ est le symétrique de point $M(z)$ par rapport à O .

On peut aussi interpréter géométriquement l'addition de la manière suivante :

Étant donné un vecteur \vec{u} d'affixe a , la translation de vecteur \vec{u} transforme le point M d'affixe z , en le point M' d'affixe $z' = z + a$.

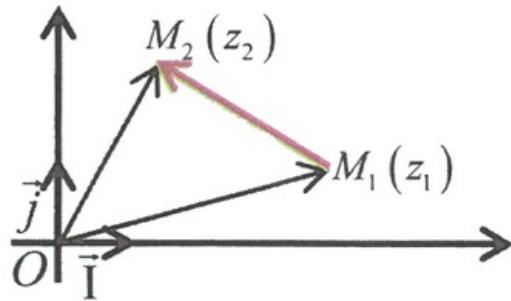


Proposition 7

Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan complexe.

Alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est $z_2 - z_1$.

En d'autres termes : $Aff\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right) = Aff(M_2) - Aff(M_1)$

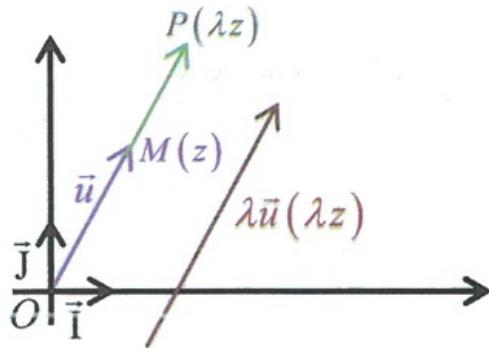


Proposition 8

Si \vec{u} est un vecteur d'affixe z et λ un nombre réel, alors l'affixe du vecteur $\lambda \vec{u}$ est λz .

En d'autres termes : $Aff(\lambda \vec{u}) = \lambda \cdot Aff(\vec{u})$

Si $M(z)$ est un point du plan, alors l'image du nombre complexe λz est le point P défini par : $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OM}$.



Remarque

A l'aide des propositions 6 et 8, on peut établir le résultat suivant :

Si \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont deux vecteurs du plan, alors pour tout $(\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$Aff(\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2) = \lambda_1 Aff(\vec{v}_1) + \lambda_2 Aff(\vec{v}_2)$$

3-3/ Interprétation complexe de la linéarité, du parallélisme et du barycentre

Proposition 9

Soient A , B et C des points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A , z_B et z_C .

Les points A , B et C sont alignés si et seulement si : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Proposition 10

Soient A , B , C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A , z_B , z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si : $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Proposition 11

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B , et soit $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha + \beta \neq 0$.

L'affixe du barycentre G du système pondéré $\{(A; \alpha); (B; \beta)\}$ est le complexe :

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$$

Remarques

Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors l'affixe du milieu I du segment $[AB]$ est le nombre complexe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

En fait ceci n'est rien qu'un cas particulier du barycentre où les « poids » sont égaux.

On peut généraliser le résultat de la proposition 11 pour le barycentre de plus de deux points.

Plus précisément : si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0$, alors le barycentre G du système pondéré $\{(A_1; \alpha_1), (A_2; \alpha_2), \dots, (A_n; \alpha_n)\}$ a pour affixe :

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A_2} + \dots + \alpha_n z_{A_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

IV- Conjugué d'un nombre complexe

4-1/ Définition et interprétation géométrique

Définition 5

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle conjugué de z le nombre complexe $x - iy$, noté \overline{z} , et on écrit :
 $\overline{z} = x + iy = x - iy$.

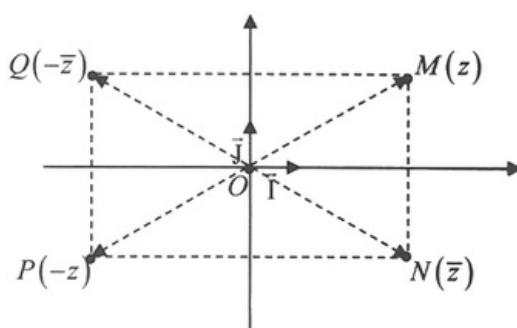
On a alors: $\overline{z} = Re(z) - iIm(z)$ et $\overline{\overline{z}} = z$

Interprétation géométrique de la conjugaison

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

La symétrie par rapport à l'axe des abscisses transforme le point $M(x; y)$ en $N(x; -y)$, d'affixe $Aff(N) = \overline{Aff(M)}$.

La symétrie par rapport à l'axe des abscisses transforme le point $M(x; y)$ en $Q(-x; y)$, d'affixe $Aff(Q) = -\overline{Aff(M)}$.



4-2/ Propriétés du conjugué

Proposition 12

Étant donné $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} Re(z) &= \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \\ Im(z) &= \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \\ z \cdot \overline{z} &= (Re(z))^2 + (Im(z))^2 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{z} = z \\ z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{z} = -z \end{aligned}$$

Remarque

En pratique, pour éliminer les complexes du dénominateur d'une fraction, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Proposition 13

Soit z et z' deux nombres complexes.

On a alors les propriétés suivantes :

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$
- Si $z \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$
- Si $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

Remarques

1- Soit $n \geq 2$, et z_1, z_2, \dots, z_n des nombres complexes. Alors :

$$\overline{\sum_{k=1}^n z_k} = \sum_{k=1}^n \overline{z_k} \quad \text{et} \quad \overline{\prod_{k=1}^n z_k} = \prod_{k=1}^n \overline{z_k}$$

2- Soit $P(z)$ un polynôme dans \mathbb{C} à coefficients réels :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

(les nombres a_0, a_1, \dots, a_n sont alors réels). On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ \overline{P(z)} &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \end{aligned}$$

Puisque pour tout entier k compris entre 1 et n (au sens large) : $\overline{a_k} = a_k$ et

$$\overline{z^k} = (\overline{z})^k$$

Alors $\overline{P(z)} = a_n (\overline{z})^n + a_{n-1} (\overline{z})^{n-1} + \dots + a_1 \overline{z} + a_0 = P(\overline{z})$.

En particulier, si α est racine du polynôme P (c'est-à-dire $P(\alpha) = 0$), alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P car : $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0$

On obtient alors le résultat important suivant :

« Si α est racine d'un polynôme à coefficients réels, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de ce polynôme »

V- Module d'un nombre complexe

5-1/ Définition et interprétation géométrique

Définition 6

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

Le module de z est le réel positif noté $|z|$ défini par : $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

On a alors : $|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2}$

Remarques

La notion de module prolonge celle de la valeur absolue, c'est-à-dire que le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.

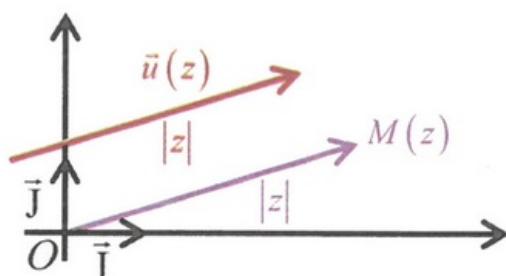
On a pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ et $|z| = |\overline{z}|$. Si $z \neq 0$ alors : $\overline{z} = \frac{|z|^2}{z}$

Interprétation géométrique du module

Étant donné $z \in \mathbb{C}$, d'image M , le module de z est la distance OM :

$$|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM$$

Si \vec{u} est un vecteur d'affixe z , alors : $|z| = \|\vec{u}\|$



Proposition 14

La distance entre deux points A et B , d'affixes respectives a et b , est :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |b - a|$$

Proposition 15

Soit a un nombre complexe et r un réel strictement positif. On note A l'image de a .

L'ensemble des images $M(z)$ des nombres complexes z tels que :

- $|z - a| = r$ est le cercle \mathcal{C} de centre A et de rayon r .
- $|z - a| \leq r$ est le disque fermé \mathcal{D} de centre A et de rayon r .
- $|z - a| < r$ est le disque ouvert Δ de centre A et de rayon r .

5-2/ Propriétés du module

Proposition 16

Soit z et z' deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

- $|z| \geq 0$ et $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ et $|z - z'| = 0 \Leftrightarrow z = z'$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$

Si $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$ alors : $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ et $\left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}$ et $|z^n| = |z|^n$

Remarque

Si n est un entier supérieur ou égal à 2, et z_1, z_2, \dots, z_n des nombres complexes, alors :

$$\left| \prod_{k=1}^n z_k \right| = \prod_{k=1}^n |z_k|$$

Proposition 17

Étant donné deux nombres complexes z et z' , on a : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

C'est l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes.

VI- Forme trigonométrique d'un complexe

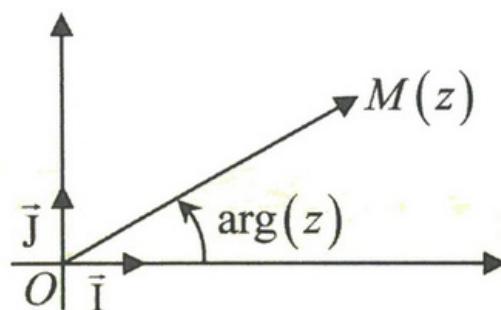
6-1/ Argument d'un nombre complexe non nul

Définition 7

Soit z un nombre complexe non nul, d'image M dans le plan complexe \mathcal{P} .

Toute mesure θ de l'angle orienté $\widehat{\vec{OI}; \vec{OM}}$ s'appelle un argument de z .

On le note $\arg(z)$ et on écrit : $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$



Remarques

Soit z un nombre complexe non nul.

Si θ est un argument du nombre complexe z , alors tout nombre réel de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z .

Dans la pratique, on prend souvent θ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, c'est-à-dire la mesure principale de l'angle $\widehat{\vec{OI}; \vec{OM}}$.

Le nombre 0 est l'unique nombre complexe qui n'a pas d'argument.

6-2/ Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Proposition 18

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et θ un argument de z .

Alors $x = |z| \cos \theta$ et $y = |z| \sin \theta$.

Tout nombre complexe non nul z s'écrit de manière unique sous la forme $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, où θ est un argument de z .

Définition 8

Soit z un nombre complexe non nul et θ un argument de z .

L'écriture $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ est appelée une écriture trigonométrique ou forme trigonométrique du nombre complexe z .

Notation simplifiée : $z = [|z|; \theta]$

Remarque

Tout nombre complexe non nul admet une infinité de formes trigonométriques.

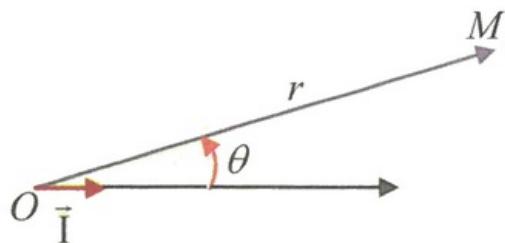
Si $z \in \mathbb{C}^*$ alors : $z = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$

Définition 9

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

On pose $r = OM$ et θ une mesure de l'angle $\widehat{\vec{I} ; \vec{OM}}$ ($\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$).

Le couple $(r; \theta)$ est appelé le couple des coordonnées polaires du point M par rapport à l'axe polaire $(O; \vec{I})$. Le point O est le pôle



Proposition 19

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ tel que $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors : $|z| = r$ et $\theta \equiv \arg(z) [2\pi]$

Proposition 20

Soit z un nombre complexe non nul.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z \in \mathbb{R}^* &\Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0 [\pi] \\
z \in \mathbb{R}_+^* &\Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0 [2\pi] \\
z \in \mathbb{R}_-^* &\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi [2\pi] \\
z \in i\mathbb{R}^* &\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \\
z \in i\mathbb{R}_+^* &\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \\
z \in i\mathbb{R}_-^* &\Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]
\end{aligned}$$

Remarques

1- Les propositions 18 et 19 nous indiquent que toute écriture du genre $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est une forme géométrique d'un nombre complexe de module r et d'argument θ .

2- La proposition 20 nous facilite la détermination d'une forme trigonométrique d'un nombre réel ou imaginaire pur. En effet, si x est un nombre réel strictement positif, alors :

3- La détermination d'une écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul z est équivalente à la détermination de son module et d'un de ces arguments. Pratiquement :

Si $z = x + iy$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, et donc :

$$\frac{z}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Et si $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$ alors $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, et donc :

$$\frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Par conséquent : $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Ainsi, la connaissance de $\cos \theta$ et $\sin \theta$ permet la détermination d'un argument de z . (On pourra utiliser les boutons \cos^{-1} et \sin^{-1} de la calculatrice).

4- Si $z = \lambda(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_-$ alors $|z| = -\lambda$. Par suite : $z = |\lambda|(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi))$ est une forme trigonométrique du nombre z .

Proposition 21

Pour des nombres complexes non nuls z et z' , on a :

$$\begin{aligned}
z' = z &\Leftrightarrow (|z'| = |z| \text{ et } \arg(z') \equiv \arg(z) [2\pi]) \\
z' = \overline{z} &\Leftrightarrow (|z'| = |z| \text{ et } \arg(z') \equiv -\arg(z) [2\pi]) \\
z' = -z &\Leftrightarrow (|z'| = |z| \text{ et } \arg(z') \equiv \pi + \arg(z) [2\pi])
\end{aligned}$$

Corollaire

Soit z un nombre complexe non nul.

Si $z = [r, \theta]$ alors : $\overline{z} = [r, -\theta]$ et $-z = [r, \pi + \theta]$.

En particulier, on a : $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$ et $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$

Proposition 22

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$

On a les relations suivantes :

- 1 $zz' = [rr', \theta + \theta']$ et $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
- 2 $\frac{1}{z} = [\frac{1}{r}; -\theta]$ et $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$
- 3 $\frac{z}{z'} = [\frac{r}{r'}, \theta - \theta']$ et $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$
- 4 $(\forall n \in \mathbb{Z}) z^n = [r^n, n\theta]$ et $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) [2\pi]$

Remarques

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et z_1, z_2, \dots, z_n des nombres complexes non nuls. Alors :

$$\arg(\prod_{k=1}^n z_k) = \sum_{k=1}^n \arg(z_k) [2\pi]$$

Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes non nuls tels que $z_1 + z_2 \neq 0$, alors on n'a pas en général $\arg(z_1 + z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$.

Contre-exemple :

$$\arg(1) + \arg(i) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ et } \arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ et } \frac{\pi}{2} \not\equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, et soit M et M' leurs images respectives dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{I}; \vec{J})$

À partir de la proposition 22, on peut déduire que le point $P(z, z')$ est le point du plan complexe tel que :

$$OP = OM \times OM' \text{ et } \widehat{(\vec{I}; \vec{OP})} \equiv \widehat{(\vec{I}; \vec{OM})} + \widehat{(\vec{I}; \vec{OM'})} [2\pi]$$

6-3/ Angle de deux vecteurs et argument d'un complexe

Proposition 23

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z' , et soit A, B, C et D des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Alors le nombre complexe $\frac{z'}{z}$ a pour argument toute mesure de l'angle $\widehat{(\vec{u}; \vec{v})}$

. Ainsi :

1- $\widehat{(\vec{I}; \vec{u})} \equiv \arg(z) [2\pi]$ et $\widehat{(\vec{I}; \vec{AB})} \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi]$ (argument de l'affixe du vecteur \vec{AB}).

2- $\widehat{(\vec{u}; \vec{v})} \equiv \arg(\frac{z'}{z}) [2\pi]$ et $\widehat{(\vec{AB}; \vec{CD})} \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$

Proposition 24

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z' , et soit A, B, C et D des points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D . On a :

1- Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si, et seulement si,

$$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv 0 [\pi] \quad \left(\frac{z'}{z} \in \mathbb{R}\right)$$

$$\text{Et : } (AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0 [2\pi]$$

2- Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si, et seulement si,

$$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \quad \left(\frac{z'}{z} \in i\mathbb{R}\right)$$

$$\text{Et : } (AB) \perp (CD) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

3- Les points A, B, C et D sont alignés ou cocycliques (appartenant au même cercle) si, et seulement si : $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_D - z_C}{z_B - z_D}\right) \in \mathbb{R}$

6-4/ Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition 10

Pour tout réel θ , on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument θ .

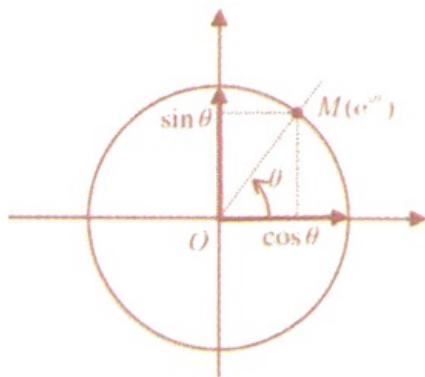
Autrement dit : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Remarques

D'après la définition 10, les nombres complexes de la forme $e^{i\theta}$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$) sont les affixes des points du plan complexe situés sur le cercle trigonométrique, et inversement, tout point du cercle trigonométrique a une affixe de la forme $e^{i\theta}$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$).

Par convention, on écrit pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i(-\theta)} = e^{i\theta}$

Lorsque $\theta = 0$, alors on a $e^{i\theta} = 1$; ainsi, cette nouvelle définition est donc compatible avec la valeur que donne en 0 la fonction exponentielle déjà connue sur \mathbb{R} .



Proposition 25

Soit θ et θ' deux nombres réels. Alors :

- 1 $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) \equiv \theta [2\pi]$
- 2 $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- 3 $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta$
- 4 $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- 5 $e^{i(\theta)} = e^{i(\theta')} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' [2\pi]$
- 6 $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Définition 11

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ .

L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée la notation exponentielle ou l'écriture exponentielle du nombre z .

Proposition 26

Pour tout réel θ et pour tout entier relatif n , on a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, ou encore, par définition de $e^{i\theta}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

« Formule de Moivre »

Pour tout réel θ :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

« Formules d'Euler »