

Sommaire

II- Exercices I

2-1/ Exercice 1-1

2-2/ Exercice 1-2

2-3/ Exercice 1-3

2-4/ Exercice 1-4

II- Exercices I

2-1/ Exercice 1-1

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

Soit (\mathcal{C}_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère

orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
2. Étudier la branche infinie de (\mathcal{C}_n) au voisinage de $-\infty$.
3. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe au voisinage de (\mathcal{C}_n) , puis déterminer la position relative de (\mathcal{C}_n) et (D) .
4. Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations.
5. Construire la courbe (\mathcal{C}_3) . (On prend $f_3(-0,6) \approx 0$ et $f_3(-1,5) \approx 0$ et $\ln 3 \approx 1,1$).
6. Montrer que pour $n \geq 3$ on a : $\frac{e}{n} < \ln n$
7. Montrer que pour $n \geq 3$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que : $x_n \leq -\ln n$ et $\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0$.
8. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

On considère la fonction numérique g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x ; x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

9. Montrer que la fonction g est continue à droite au point 0.
10. Vérifier que pour $n \geq 3$ on a : $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$.
11. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$.

2-2/ Exercice 1-2

Soit n un entier naturel .

On considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R}^* par : $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{x^2}$

Soit (\mathcal{C}_n) la courbe de f_n dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$.
- Étudier les branches infinies de la courbe (\mathcal{C}_n) .
- Montrer que f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$, puis calculer $f_n'(x)$.
- Dresser le tableau de variations de f_n .
- Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet dans $]-\infty; 0[$ une seule solution x_n .
- Montrer que $(\forall n \geq 2) -1 < x_n < -\frac{1}{n}$
- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) f_{n+1}(x_n) = e^{x_n}$, et en déduire que $(x_n)_n$ est convergente.
- Prouver que $(\forall n \geq 2) x_n \geq -\frac{2 \ln n}{n}$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n x_n$.
- Tracer la courbe (\mathcal{C}_1) .

2-3/ Exercice 1-3

Soit n un entier de \mathbb{N}^* .

On considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$

Partie 1

On pose $g(x) = 1 + (x - 1)e^x$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- Étudier les variations de g , en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) g(x) > 0$.
- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$.
- Étudier la branche infinie de (\mathcal{C}_n) au voisinage de $+\infty$.
- Calculer la dérivée f_n' , puis déduire que f_n est strictement croissants sur $]0; +\infty[$.

- Étudier la position relative des courbes (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) .
- Tracer dans un même repère les courbes (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) .

Partie 2

- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n et que $\alpha_n < 1$.
- Vérifier que $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln \alpha_n$, en déduire que $(\alpha_n)_n$ est croissante.
- Montrer que $(\forall x \in]0; 1]) \frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.
- Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

2-4/ Exercice 1-4

Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{x^2} - 1$$

Partie 1

On suppose $n = 1$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$, interpréter les résultats.
 - Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = +\infty$, que peut-on déduire ?
 - Calculer $f_1'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, puis donner le tableau de variations.
- Soit h la restriction de f_1 sur $I =]0, 2]$.
- Montrer que h est bijective de I vers un intervalle J à déterminer.
 - Calculer $f_1(1)$ et montrer que h^{-1} est dérivable en $a = e - 1$, et déterminer $(h^{-1})'(e - 1)$.
 - Tracer la courbe de f_1 .

Partie 2

- Étudier le sens de variation de f_n sur $] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
- Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n dans $] -\infty; 0[$.
- Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ sur $] -\infty; 0[$.
- Déduire la position relative des courbes (\mathcal{C}_n) et (\mathcal{C}_{n+1}) .
- Montrer que $(\alpha_n)_n$ est croissante et convergente.
- Déterminer la limite de la suite $(\alpha_n)_n$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^2}{k^2}$ pour tout n de \mathbb{N}^* .

- Montrer que $(S_n)_n$ est croissante et convergente.

(On Remarque que $(\forall k \geq 2) \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)})$