

Sommaire

I- Équations trigonométriques

1-1/ Équations de la forme $\cos x = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

1-2/ Équations de la forme $\sin x = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

1-3/ Équations de la forme $\tan x = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

II- Inéquations trigonométriques dans un intervalle $K \subset \mathbb{R}$

2-1/ Inéquations de la forme

$\cos x \geq a$; $\cos x > a$; $\cos x \leq a$; $\cos x < a$

2-2/ Inéquations de la forme

$\sin x \geq a$; $\sin x > a$; $\sin x \leq a$; $\sin x < a$

2-3/ Inéquations de la forme

$\tan x \geq a$; $\tan x > a$; $\tan x \leq a$; $\tan x < a$

III- Exercices

3-1/ Exercice 1

3-2/ Exercice 2

3-3/ Exercice 3

3-4/ Exercice 4

I- Équations trigonométriques

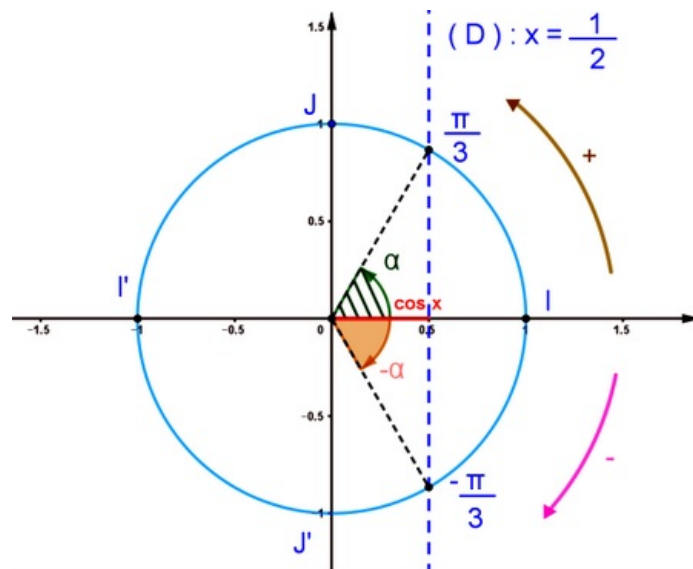
1-1/ Équations de la forme $\cos x = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

Activité

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(C) est le cercle trigonométrique d'origine I lié au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$ et $\vec{OI'} = -\vec{i}$ et $\vec{OJ'} = -\vec{j}$.

1. Construire sur le cercle les points M de (C) tel que $\cos \left(\vec{i}, \vec{OM} \right) = \frac{1}{2}$.
2. Déterminer pour chaque cas les abscisses curvilignes de M .
3. Déterminer pour chaque cas les mesures de l'angle orienté $\left(\vec{i}, \vec{OM} \right)$.
4. Que peut-on dire pour M de (C) tel que $\cos \left(\vec{i}, \vec{OM} \right) = 3$?



Propriété

Soit $x \in \mathbb{R}$ et a un réel donné.

L'équation $x \in \mathbb{R} : \cos x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) pour solutions :

- 1er cas : $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

L'équation n'a pas de solution d'où $S = \emptyset$

- 2ème cas : $a \in [-1, 1]$

on a $\cos x = a$, on cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \cos \alpha$, d'où :

$$\begin{aligned} \cos x = a &\Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \alpha + 2k\pi, x = -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

Cas particulier :

$a = 0$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$a = 1$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$a = -1$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

1-2/ Équations de la forme $\sin x = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

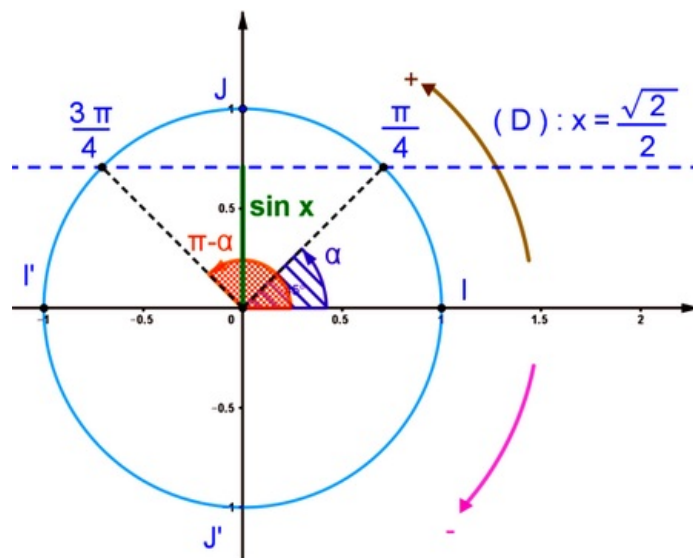
Activité

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(C) est le cercle trigonométrique d'origine I lié au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que

$$\overrightarrow{OI} = \vec{i} \text{ et } \overrightarrow{OJ} = \vec{j} \text{ et } \overrightarrow{OI'} = -\vec{i} \text{ et } \overrightarrow{OJ'} = -\vec{j}.$$

1. Construire sur le cercle les points M de (C) tel que $\sin \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Déterminer pour chaque cas les abscisses curvilignes de M .
3. Déterminer pour chaque cas les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM} \right)$.
4. Que peut-on dire pour M de (C) tel que $\sin \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$?



Propriété

Soit $x \in \mathbb{R}$ et a un réel donné.

L'équation $x \in \mathbb{R} : \sin x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) pour solutions :

- 1er cas : $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

L'équation n'a pas de solution d'où $S = \emptyset$

- 2ème cas : $a \in [-1, 1]$

on a $\sin x = a$, on cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \sin \alpha$, d'où :

$$\begin{aligned}\sin x = a &\Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \alpha + 2k\pi, x = \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

Cas particulier :

$a = 0$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$a = 1$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$a = -1$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

1-3/ Équations de la forme $\tan x = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

Activité

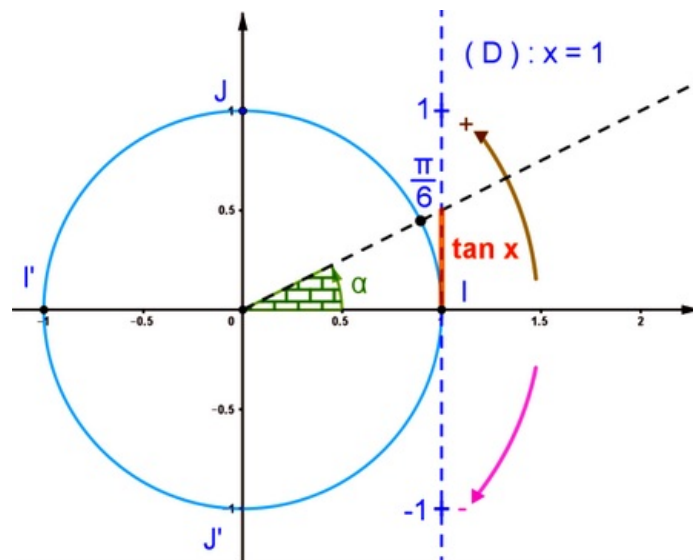
Il faut au départ déterminer l'ensemble de définition de l'équation :

$$\{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Soit la droite (T) tangente au cercle (C) en I , coupe la demi-droite $[OM)$ au point T (condition $M \neq J$ et $M \neq J'$).

La droite (T) est muni du repère $\left(I, \vec{i}\right)$.

1. Déterminer la condition sur x pour que $\tan(x)$ soit définie .
2. Construire sur la droite (T) et le point T tel que $\tan \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OT} \right) = \frac{1}{2}$.
3. Construire sur le cercle les points M intersection de la droite (OT) et le cercle (C).
4. Déterminer pour chaque cas les abscisses curvilignes de M .
5. Déterminer les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM} \right)$.
6. Que peut-on dire pour M de (C) tel que $\tan \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM} \right) = -5$?



Propriété

Soit $x \in \mathbb{R}$ et a un réel donné.

Soit l'équation $x \in \mathbb{R} : \tan x = a$ ($a \in \mathbb{R}$).

L'ensemble de définition de l'équation (E) est $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

On a $\tan x = a$ ($a \in \mathbb{R}$), et on cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \tan \alpha$, d'où :

$$\begin{aligned} \tan x = a &\Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \\ &\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

II- Inéquations trigonométriques dans un intervalle $K \subset \mathbb{R}$

2-1/ Inéquations de la forme

$$\cos x \geq a; \cos x > a; \cos x \leq a; \cos x < a$$

Exemple 1

1. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(E_1) : x \in [0, 2\pi]; \cos x \leq \frac{1}{2}$$

2-2/ Inéquations de la forme

$$\sin x \geq a; \sin x > a; \sin x \leq a; \sin x < a$$

Exemple

1. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(E_1) : x \in [0, 2\pi]; \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2-3/ Inéquations de la forme

$$\tan x \geq a; \tan x > a; \tan x \leq a; \tan x < a$$

1. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(E_1) : x \in [0, \pi]; \tan x > \frac{1}{2}$$

III- Exercices

3-1/ Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2 $\sin(x) = \frac{1}{2}$	3 $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4 $\tan(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
---	--

2. Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

1 $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} ; I = [0, 2\pi]$ 2 $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) ; I = [-\pi, \pi]$	3 $\tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} ; I = [0, 2\pi]$ 4 $2\cos(x) = -1 ; I = [0, \pi]$
--	--

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1 $\sin(x) \geq \frac{1}{2} ; I = [0, 2\pi]$ 2 $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} ; I =]-\pi, \pi]$	3 $\tan(x) < -\sqrt{3} ; I =]-\pi, \pi]$ 4 $\cos(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} ; I = [0, 2\pi]$
---	---

3-2/ Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- 1 $2\cos^2(x) - 1 = 0$
- 2 $\cos^2(x) - 3\cos(x) + 2 = 0$
- 3 $3\tan^2(x) - 1 = 0$
- 4 $2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$

3-3/ Exercice 3

1. Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

1 $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 ; I = [0, 2\pi]$ 2 $2\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{2} ; I = [-\pi, \pi]$ 3 $2\cos(2x) = \sqrt{3} ; I = [0, 2\pi]$ 4 $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} ; I = [-\pi, \pi]$	
---	--

3-4/ Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On pose $P(x) = 2 \cos^2(x) + \cos(x)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
2. Étudier le signe de $P(x)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
3. Dédire les solutions de $P(x) \leq 0$ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

On pose $Q(x) = -2 \sin^2(x) + 3 \sin(x) - 1$.

4. Montrer que $Q(x) = (2 \sin(x) - 1)(1 - \sin(x))$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$.
6. Étudier le signe de $Q(x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
7. Dédire les solutions de $Q(x) > 0$ dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.