

### Sommaire

#### I- Rotation et rotation réciproque

1-1/ Rotation

1-2/ Rotation réciproque

#### II- Caractérisations et propriétés de la rotation

2-1/ Caractérisations de la rotation

2-2/ Propriétés de la rotation

#### III- Image d'une droite, d'un segment et d'un cercle par une rotation

#### IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

4-2/ Exercice 2

4-3/ Exercice 3

4-4/ Exercice 4

4-5/ Exercice 5

4-6/ Exercice 6

#### I- Rotation et rotation réciproque

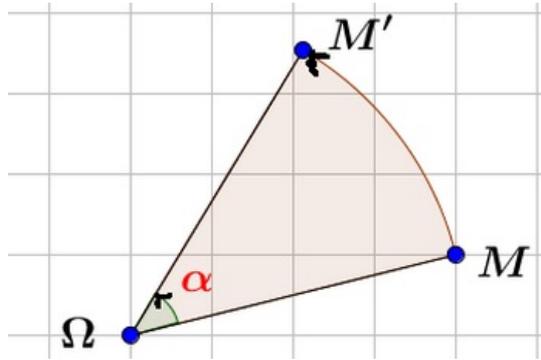
1-1/ Rotation

##### **Définition**

Soit  $\Omega$  un point du plan orienté dans le sens direct et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

La rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\alpha$  est la transformation du plan, qui à tout point  $M$  du plan associe le point  $M'$  défini par :

- Si  $M = \Omega$  alors :  $M' = \Omega$
- Si  $M \neq \Omega$  alors : 
$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega M = \Omega M' \\ \left( \overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \alpha [2\pi] \end{array} \right.$$



## Formule analytique d'une rotation

La rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\alpha$  est notée :  $r(\Omega, \alpha)$ , ou simplement  $r$ , l'osqu'il n'y a pas de confusion possible.

Si  $M'$  est l'image de  $M$  par la rotation  $r$ , alors on dit que la rotation  $r$  transforme  $M$  en  $M'$ , et on écrit :  $r(M) = M'$ . Et on a :  $r(\Omega) = \Omega$

$$(\forall M \in \mathcal{P}) \text{ avec } M \neq \Omega, \text{ on a : } r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left( \widehat{\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}} \right) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$$

## 1-2/ Rotation réciproque

### Définition

Soit  $r$  une rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$ .

La rotation de centre  $O$  et d'angle  $-\alpha$  est appelée rotation réciproque de  $r$ . On la note  $r^{-1}$ .

## II- Caractérisatiques et propriétés de la rotation

### 2-1/ Propriétés de la rotation

#### Propriété 1

La rotation conserve :

- les longueurs ;
- les angles (l'image d'un angle est un angle de même amplitude) ;
- les parallèles (les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles) ;
- les aires (l'image d'une figure est une figure de même aire).

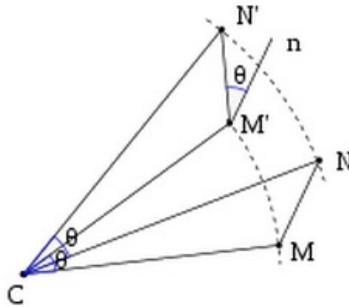
#### Propriété 2

Soient  $M$  et  $N$  deux points du plan distincts.

On note  $M'$  et  $N'$  leurs images respectives par la rotation de centre  $C$  et d'angle  $\theta$ .

Alors on a :

$$MN = M'N' \\ \left( \overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'} \right) \equiv \theta [2\pi]$$



### Propriété 3

Une rotation transforme trois points alignés dans un ordre en trois points alignés dans le même ordre.

### Propriété 4

soient  $A, B$  et  $C$  trois points du plan distincts.

On note  $A', B'$  et  $C'$  leurs images respectives par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$ .

Alors :

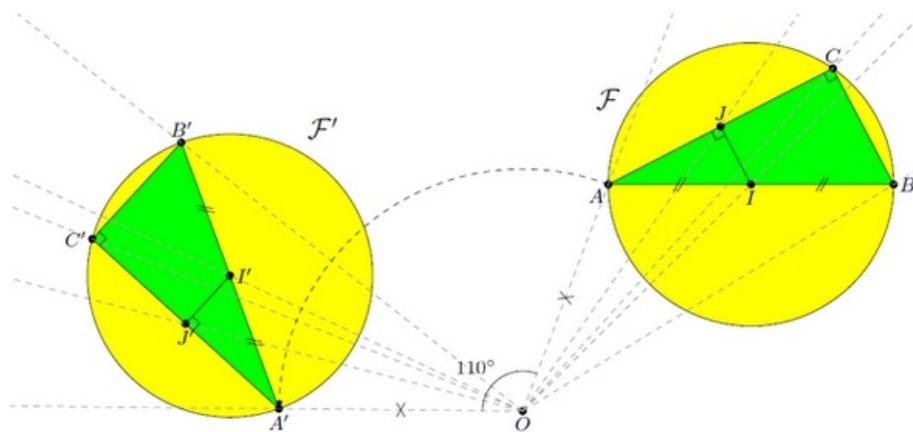
$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'}\right)$$

## III- Image d'une droite, d'un segment et d'un cercle par une rotation

Soit  $r$  une rotation. Soit  $A$  et  $B$  deux points tels que  $A \neq B$ .

Alors on a :

- (1) L'image de la droite  $(AB)$  par la rotation  $r$  est la droite  $(A'B')$  telle que  $r(A) = A'$  et  $r(B) = B'$ .
- (2) L'image du segment  $[AB]$  est le segment  $[A'B']$  telle que  $r(A) = A'$  et  $r(B) = B'$ .
- (3) L'image du cercle  $F$  par la rotation  $r$  est le cercle  $F'$ .



## IV- Exercices

### 4-1/ Exercice 1

$ABCD$  un carré de centre  $O$  tel que :  $\overline{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Soient  $I$  et  $J$  deux points tels que :  $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Les droites  $(IC)$  et  $(JD)$  coupent respectivement  $(BD)$  et  $(AC)$  en  $M$  et  $N$ .

Soit  $r$  la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

1. Déterminer  $r(A)$  et  $r(B)$ .
2. Montrer que  $I$  est le barycentre des points pondérés  $(A; 1)$  et  $(B; -3)$ .
3. Montrer que :  $r(I) = J$
4. Déterminer l'image de chacune des droites  $(BD)$  et  $(IC)$  par la rotation  $r$ .
5. En déduire que  $r(M) = N$ .
6. Montrer que :  $IM = JN$
7. Montrer que :  $(CM) \perp (DN)$

### 4-2/ Exercice 2

$ABC$  est un triangle isocèle et rectangle en  $A$  tel que  $\overline{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

Soit  $E$  le milieu du segment  $[BC]$ .

On considère la rotation  $r$  de centre  $E$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

1. Montrer que  $r(A) = B$  et  $r(C) = A$

Soit  $(\varphi)$  le cercle de centre  $C$  et passant par le point  $E$

2. Construire  $(\varphi')$  l'image du cercle  $(\varphi)$  par la rotation  $r$

Le cercle  $(\varphi)$  coupe le segment  $[AC]$  en un point  $I$  et  $(\varphi')$  coupe le segment  $[AB]$  en un point  $J$ .

3. Montrer que  $r(I) = J$ .

### 4-3/ Exercice 3

On considère un parallélogramme  $ABCD$ .

On construit à l'extérieur de ce parallélogramme un triangle  $IAB$  rectangle et isocèle en  $I$  et

un carré  $BEFC$  tel que  $\overline{(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IB})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

1. Construire la figure.

On considère la rotation  $r$  de centre  $I$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

On pose :  $r(D) = K$

2. Montrer que :  $\overline{(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BK})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

3. Montrer que  $K$  est l'image de  $C$  par la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

4. En déduire que  $r(D) = E$

#### 4-4/ Exercice 4

$ABC$  est un triangle rectangle en  $B$  tel que  $\overline{(\vec{BA}; \vec{BC})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Le cercle  $(\varphi)$  de centre  $C$  et de rayon  $AB$  coupe le segment  $[AC]$  en  $D$ .

La médiatrice du segment  $[AD]$  coupe La médiatrice du segment  $[BC]$  en  $O$ .

Soit  $r$  la rotation qui transforme  $D$  en  $A$  et  $C$  en  $B$ .

1. Déterminer le centre de la rotation  $r$ .

2. Montrer que  $\overline{(\vec{OA}; \vec{OB})} \equiv \overline{(\vec{OD}; \vec{OC})} [2\pi]$

3. Déterminer  $(\varphi')$  l'image du cercle  $(\varphi)$  par la rotation  $r$

Soient  $F$  et  $G$  les points définis par  $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB}$  et  $\vec{CF} = \frac{2}{3}\vec{CD}$

4. Montrer que  $r(F) = G$

5. Déterminer l'image de la droite  $(BG)$  par la rotation réciproque de la rotation  $r$

#### 4-5/ Exercice 5

$ABC$  est un triangle direct, on construit à l'extérieur du triangle  $ABC$  les carrés  $ABEF$  et  $ACGH$ , tels que :

$$\overline{(\vec{AB}; \vec{AF})} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ et } \overline{(\vec{AC}; \vec{AH})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

On construit un parallélogramme  $AHKF$  de centre  $I$ .

On considère la rotation  $r$  de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

1. Déterminer  $r(F)$  et  $r(C)$

2. Montrer que :  $\overline{(\vec{CA}; \vec{CF})} \equiv \overline{(\vec{HA}; \vec{HB})} [2\pi]$

Soit  $J$  l'image du point  $I$  et  $D$  l'image du point  $H$  par la rotation  $r$ .

3. Montrer que  $J$  est le milieu du segment  $[BD]$

#### 4-6/ Exercice 6

Soit  $ABCD$  un losange.

On considère un cercle  $(\mathcal{C})$  de centre  $B$  et de rayon  $R$  avec  $0 < R < AB$ .

$E$  et  $F$  sont les points d'intersection respectifs de  $(\mathcal{C})$  avec  $[AB]$  et de  $(\mathcal{C})$  avec  $[BC]$ .

1. Déterminer  $G$  le centre de la rotation  $r$  qui transforme  $B$  en  $F$  et  $E$  en  $B$

Notons:  $F'$ ,  $A'$ ,  $C'$  et  $D'$  les images respectives de  $F$ ,  $A$ ,  $C$  et  $D$  par la rotation  $r$

2. Montrer que :  $(BF') // (A'C')$