AlloSchool

Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 7 (La rotation dans le plan)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Rotation et rotation réciproque

1-1/ Rotation

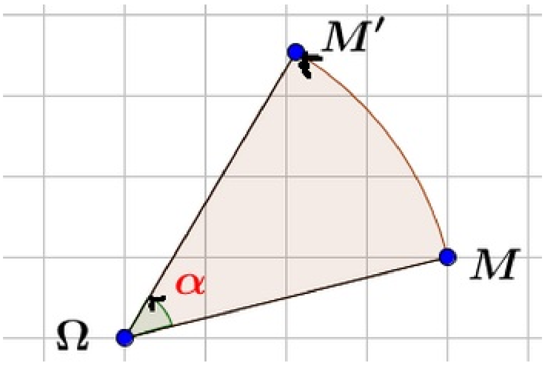
Définition

Soit Ω un point du plan orienté dans le sens direct et $\alpha \in \mathbb{R}$.

La rotation de centre Ω et d'angle α est la transformation du plan, qui à tout point M du plan associe le point M' défini par :

- Si $M = \Omega$ alors : $M' = \Omega$

- Si $M \neq \Omega$ alors : $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \alpha \, [2\pi] \end{cases}$



Formule analytique d'une rotation

La rotation de centre Ω et d'angle α est notée : $r(\Omega, \alpha)$, ou simplement r, l'osqu'il n'y a pas de confusion possible.

Si M' est l'image de M par la rotation r, alors on dit que la rotation r transforme M en M', et on écrit : $r(M) = M'$. Et on a : $r(\Omega) = \Omega$

$(\forall M \in \mathscr{P})$ avec $M \neq \Omega$, on a :$r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}}\right) \equiv \alpha \, [2\pi] \end{cases}$

1-2/ Rotation réciproque

Définition

Soit r une rotation de centre O et d'angle α.

La rotation de centre O et d'angle $-\alpha$ est appelée rotation réciproque de r. On la note r^{-1}.

II- Caractérisatiques et propriétés de la rotation

2-1/ Propriétés de la rotation

Propriété 1

La rotation conserve :

- les longueurs ;
- les angles (l'image d'un angle est un angle de même amplitude) ;
- les parallèles (les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles) ;
- les aires (l'image d'une figure est une figure de même aire).

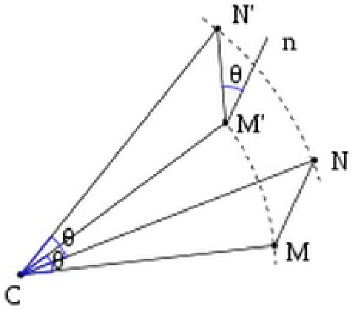
Propriété 2

Soient M et N deux points du plan distincts.

On note M' et N' leurs images respectives par la rotation de centre C et d'angle θ.

Alors on a :

$$MN = M'N'$$
$$\left(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$$



Propriété 3

Une rotation transforme trois points alignés dans un ordre en trois points alignés dans le même ordre.

Propriété 4

soient A, B et C trois points du plan distincts.

On note A', B' et C' leurs images respectives par la rotation de centre O et d'angle α.

Alors :

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'C'}\right)$$

III- Image d'une droite, d'un segment et d'un cercle par une rotation

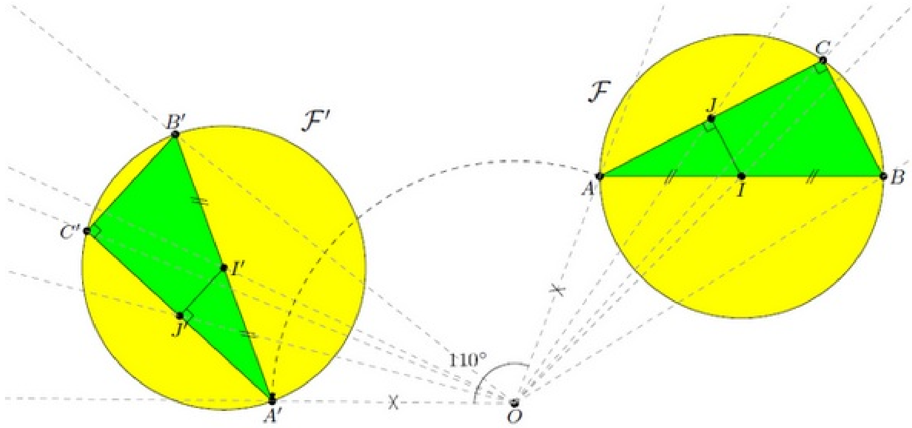
Soit r une rotation. Soit A et B deux points tels que $A \neq B$.

Alors on a :

(1) L'image de la droite (AB) par la rotation r est la droite $(A'B')$ telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$.

(2) L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A'B']$ telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$.

(3) L'image du cercle F par la rotation r est le cercle F'.



IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

$ABCD$ un carré de centre O tel que : $\overline{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Soient I et J deux points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

Les droites (IC) et (JD) coupent respectivement (BD) et (AC) en M et N.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer $r(A)$ et $r(B)$.
2. Montrer que I est le barycentre des points pondérés $(A;1)$ et $(B;-3)$.
3. Montrer que : $r(I) = J$
4. Déterminer l'image de chacune des droites (BD) et (IC) par la rotation r.
5. En déduire que $r(M) = N$.
6. Montrer que : $IM = JN$
7. Montrer que : $(CM) \perp (DN)$

4-2/ Exercice 2

ABC est un triangle isocèle et rectangle en A tel que $\overline{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit E le milieu du segment $[BC]$.

On considère la rotation r de centre E et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $r(A) = B$ et $r(C) = A$

Soit (φ) le cercle de centre C et passant par le point E

2. Construire (φ') l'image du cercle (φ) par la rotation r

Le cercle (φ) coupe le segment $[AC]$ en un point I et (φ') coupe le segment $[AB]$ en un point J.

3. Montrer que $r(I) = J$.

4-3/ Exercice 3

On considère un parallélogramme $ABCD$.

On construit à l'extérieur de ce parallélogramme un triangle IAB rectangle et isocèle en I et un carré $BEFC$ tel que $\overline{\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

1. Construire la figure.

On considère la rotation r de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On pose : $r\left(D\right) = K$

2. Montrer que : $\overline{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BK}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
3. Montrer que K est l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$
4. En déduire que $r\left(D\right) = E$

4-4/ Exercice 4

ABC est un triangle rectangle en B tel que $\overline{\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Le cercle $\left(\varphi\right)$ de centre C et de rayon AB coupe le segment $[AC]$ en D.

La médiatrice du segment $[AD]$ coupe La médiatrice du segment $[BC]$ en O.

Soit r la rotation qui transforme D en A et C en B.

1. Déterminer le centre de la rotation r.
2. Montrer que $\overline{\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)} \equiv \overline{\left(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OC}\right)}\ [2\pi]$
3. Déterminer $\left(\varphi\text{'}\right)$ l'image du cercle $\left(\varphi\right)$ par la rotation r

Soient F et G les points définis par $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$

4. Montrer que $r\left(F\right) = G$
5. Déterminer l'image de la droite $\left(BG\right)$ par la rotation réciproque de la rotation r

4-5/ Exercice 5

ABC est un triangle direct, on construit à l'extérieur du triangle ABC les carrés $ABEF$ et $ACGH$, tels que :

$$\overline{\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AF}\right)} \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ et } \overline{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AH}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

On construit un parallélogramme $AHKF$ de centre I.

On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer $r\left(F\right)$ et $r\left(C\right)$
2. Montrer que : $\overline{\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CF}\right)} \equiv \overline{\left(\overrightarrow{HA};\overrightarrow{HB}\right)}\ [2\pi]$

Soit J l'image du point I et D l'image du point H par la rotation r.

3. Montrer que J est le milieu du segment $[BD]$

4-6/ Exercice 6

Soit $ABCD$ un losange.

On considère un cercle $(\mathscr{C})$ de centre B et de rayon R avec $0 < R < AB$.

E et F sont les points d'intersection respectifs de $(\mathscr{C})$ avec $[AB]$ et de $(\mathscr{C})$ avec $[BC]$.

1. Déterminer G le centre de la rotation r qui transforme B en F et E en B

Notons: F', A', C' et D' les images respectives de F. A, C et D par la rotation r

2. Montrer que : $(BF\text{'})\ //\ (A\text{'}C\text{'})$