Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 8-1 : Équations différentielles (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Équations différentielles du premier ordre

1-1/ L'équation différentielle $y' = ay \ (a \in \mathbb{R}^*)$

Proposition 1

La solution générale de l'équation différentielle $y' = ay$ est $y = \lambda e^{ax} \ (\lambda \in \mathbb{R})$

Remarque

Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une solution unique f de l'équation différentielle $y' = ay$ vérifiant la condition $f(x_0) = y_0$.

1-2/ L'équation différentielle $y' = ay + b \ (a \in \mathbb{R}^*, \ b \in \mathbb{R})$

Proposition 2

La solution générale de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est
$y = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a} \ (\lambda \in \mathbb{R})$

II- Équations différentielles du second ordre

2-1/ L'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0 \ \left((a, b) \in \mathbb{R}^2\right)$

Proposition 3

Soit a et b deux réels quelconques.

On considère l'équation différentielle : $(E) \ : \ y'' + ay' + by = 0$

L'équation caractéristique de (E) est : $r^2 + ar + b = 0$

Son discriminant est : $\Delta = a^2 - 4b$

1) Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, et la solution générale de (E) est donnée par :

$$y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x} \ ; \ \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

2) Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une racine double r, et la solution générale de (E) est donnée par :

$$y = (\alpha x + \beta) e^{rx} \ ; \ \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

3) Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées.

En posant $r_1 = p + iq$ et $r_2 = p - iq$ avec $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, la solution générale de (E) est donnée par :

$$y = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)) e^{px} \ ; \ \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Remarques

1) Pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution de l'équation $(E) \ : \ y'' + ay' + by = 0$ vérifiant les conditions initiales : $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$.

2) L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ est un cas particulier de l'équation différentielle $(E) \ : \ y'' + ay' + by = 0$:

La solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est :

$$y = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x) \ ; \ \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

La solution générale de l'équation différentielle $y'' - \omega^2 y = 0$ est :

$$y = \alpha e^{\omega x} + \beta e^{-\omega x} \ ; \ \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

3) En gros, on peut exprimer les conditions initiales d'une équation différentielle par diverses formules, par exemple :

- Le point $A(x_0, y_0)$ appartient à la courbe de f, ce qui se traduit par : $y_0 = f(x_0)$
- La fonction f prend la valeur y_0 en x_0 ce qui se traduit par : $y_0 = f(x_0)$
- La courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet au point $A(x_0, y_0)$ une tangente de pente y_1 : $y_0 = f(x_0)$ et $y_1 = f'(x_0)$.

4) Dans les sciences physiques, on rencontre souvent les équations différentielles $ay'' + by' + cy = 0$ sous la forme à titre d'exemple : $a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$ ou sous la forme : $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$.