AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Semestre 1 Devoir 1 Modèle 1

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1 (9 pts)

Partie 1

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g\left(x\right)=Arc\tan x+\frac{x}{1+x^2}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right)$
2. Montrer que g est dérivable en 0 et donner la valeur de $g'\left(0\right)$.
3. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J qu'on doit déterminer.
4. Donner le signe de $g\left(x\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Partie 2

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=\left(x^2-1\right)Arc\tan x+x$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$
2. Montrer que $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\ f'\left(x\right)=2xg\left(x\right)$
3. Déduire le signe de $f'\left(x\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
4. Donner le tableau de variations de f.
5. Étudier le signe de $f\left(x\right)-x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Partie 3

Considérons la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_0=a$ et $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$ avec $a\in]0;1[$

1. Montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\ 0<u_n<1$
2. Étudier la monotonie de $\left(u_n\right)$, puis déduire qu'elle est convergente.
3. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

II- Exercice 2 (6 pts)

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, considérons la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par $f_n\left(x\right)=x^n-1+Arc\tan x$.

1. Montrer que $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\ \left(\exists! x_n\in]0;1[\right)\ :\ f_n\left(x_n\right)=0$
2. Montrer que $x_1>\frac{1}{2}$

Considérons la suite $\left(x_n\right)_{n\geq1}$ définie tel que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ le terme x_n désigne l'unique solution de l'équation $f_n\left(x\right)=0$ dans l'intervalle $]0;1[$.

3. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\geq 1}$, puis déduire qu'elle est convergente.
4. Montrer que la suite $({x_n}^n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, puis déduire qu'elle est convergente.
5. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 1-\frac{\pi}{4} < {x_n}^n < 1$
6. En admettant que $\lim\limits_{n\to+\infty} {x_n}^n = 1-\frac{\pi}{4}$, déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

III- Exercice 3 (5 pts)

Soit $(s_n)_{n\geq 1}$ une suite définie par $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k$, avec $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante convergente vers 0.

1. Montrer que les deux suites extraites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ tels que $v_n = s_{2n}$ et $w_n = s_{2n+1}$ sont adjacentes.
2. Déduire que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
3. Déduire que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ définie par $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}}$ est convergente.