

Sommaire

V- Problème de synthèse

5-1/ Partie 1

5-2/ Partie 2

V- Problème de synthèse

5-1/ Partie 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction g_n définie par : $g_n(x) = x + e^{-nx}$.

Et soit $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction g_n .
2. Montrer que g_n admet un minimum absolu en un réel un qu'on exprimera en fonction de n .
3. Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$.
4. Déterminer les branches infinies de $\mathcal{C}_n$.
5. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
6. Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. (On prend :

$$\|\vec{i}\| = 2cm \text{ et } \ln(2) \simeq 0.7)$$

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{M}$ par : $f_n(x) = x + e^{nx}$

Et soit Γ_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction f_n .
2. En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n .
3. Montrer que $\alpha_1 \in]-\ln 2; -\frac{1}{2}[$.
4. Montrer que les quantités $(x - \alpha_1)$ et $(e^x + \alpha_1)$ ont le même signe.

On considère la fonction φ définie sur $] -\infty; -\frac{1}{2}]$ par : $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$

5. Montrer que la fonction φ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; -\frac{1}{2}]$.

6. En déduire que pour tout $x \in]-\infty; -\frac{1}{2}]$: $|e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$

On considère la suite (β_n) définie par $\beta_0 = -\frac{1}{2}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\beta_{n+1} = -e^{\beta_n}$$

7. Montrer qu'il existe un réel α tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : |\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq \alpha |\beta_n - \alpha_1|$$

8. Montrer que la suite (β_n) est convergente et déterminer sa limite.