AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 5-3 : Fonctions exponentielles - Problème de synthèse

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

V- Problème de synthèse

5-1/ Partie 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction g_n définie par : $g_n(x) = x + e^{-nx}$.

Et soit $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction g_n.
2. Montrer que g_n admet un minimum absolu en un réel un qu'on exprimera en fonction de n.
3. Calculer les limites $\lim\limits_{x \to -\infty} g_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.
4. Déterminer les branches infinies de $\mathscr{C}_n$.
5. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
6. Tracer dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. (On prend : $||\vec{i}|| = 2cm$ et $\ln(2) \simeq 0.7$)

On considère la fonction f_n définie sur M par : $f_n(x) = x + e^{nx}$

Et soit Γ_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction f_n.
2. En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique α_n.
3. Montrer que $\alpha_1 \in \left]-\ln 2; -\frac{1}{2}\right[$.
4. Montrer que les quantités $(x - \alpha_1)$ et $(e^x + \alpha_1)$ ont le même signe.

On considère la fonction φ définie sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ par : $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$

5. Montrer que la fonction φ est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right]$.
6. En déduire que pour tout $x \in \left] -\infty ; -\frac{1}{2}\right]$: $\left|e^{x}+\alpha_1\right| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}\left|x-\alpha_1\right|$

On considère la suite $\left(\beta_n\right)$ définie par $\beta_0=-\frac{1}{2}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$\beta_{n+1}=-e^{\beta_n}$

7. Montrer qu'il existe un réel α tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ \left|\beta_{n+1}-\alpha_1\right| \leq \alpha\left|\beta_n-\alpha_1\right|$$

8. Montrer que la suite $\left(\beta_n\right)$ est convergente et déterminer sa limite.