AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 5-2-1 : Fonctions exponentielles - Partie 2 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

III- Fonction exponentielle de base a

3-1/ Définition de la fonction exponentielle de base a

3-2/ Propriétés algébriques

3-3/ Une autre écriture de la fonction exp_a

3-4/ Étude de la fonction exp_a

III- Fonction exponentielle de base a

3-1/ Définition de la fonction exponentielle de base a

Définition 2

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction exponentielle de base a est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$.

On la note exp_a.

Remarques

D'après la définition 2, on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\left(\forall y \in \mathbb{R}_+^*\right)\ \left(y = exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y)\right)$$

Soit x un réel positif et y un réel strictement positif. On a alors :

$$y = exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y) = \frac{\ln y}{\ln a} \Leftrightarrow \ln y = x \ln a \Leftrightarrow y = e^{x \ln a}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$exp_a(x) = e^{x \ln a}$$

3-2/ Propriétés algébriques

Proposition 9

Soient x et y deux réels et r un nombre rationnel . Alors :

$$exp_a(x+y) = exp_a(x).exp_a(y)$$
$$exp_a(x-y) = \frac{exp_a(x)}{exp_a(y)}$$
$$exp_a(rx) = (exp_a(x))^r$$

3-3/ Une autre écriture de la fonction exp_a

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

On a : $exp_a(1) = e^{\ln a} = a$

Et puisque pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $exp_a(r) = (exp_a(1))^r = a^r$

On prolonge cette écriture sur l'ensemble des nombres réels en écrivant pour tout $x \in \mathbb{R}$: $exp_a(x) = a^x$

Proposition 10

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

Alors :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R}_+^*)\ y = a^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a}$$
$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \log_a(a^x) = x$$
$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ a^{\log_a(x)} = x$$
$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ a^{x+y} = a^x . a^y \ \text{ et } \ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

Remarque

On a supposé que $a > 0$ et $a \neq 1$, et après avoir prolongé l'écriture expa sous la forme d'une puissance de a, on a obtenu : $(\forall x \in \mathbb{R})\ a^x = e^{x \ln a}$

Le fait que $e^0 = 1$ nous conduit à poser « par convention » : $1^x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a donc : $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall a \in \mathbb{R}_+^*)\ a^x = e^{x \ln a}$

Proposition 11

Soit a et b deux réels strictement positifs.

Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$a^{x+y} = a^x \times a^y \ ; \ a^{-x} = \frac{1}{a^x} \ ; \ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy} \ ; \ (ab)^x = a^x . b^x \ ; \ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

3-4/ Étude de la fonction exp_a

Proposition 12

La fonction exp_a est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(exp_a)'(x) = (a^x)' = (\ln a) a^x$$

Proposition 13

Si $a > 1$ alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)\ x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$$

Si $0 < a < 1$ alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)\ x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$$

Proposition 14

Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.