

Sommaire

III- Fonction exponentielle de base a

3-1/ Définition de la fonction exponentielle de base a

3-2/ Propriétés algébriques

3-3/ Une autre écriture de la fonction exp_a

3-4/ Étude de la fonction exp_a

III- Fonction exponentielle de base a

3-1/ Définition de la fonction exponentielle de base a

Définition 2

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction exponentielle de base a est la fonction réciproque de la fonction \log_a .

On la note exp_a .

Remarques

D'après la définition 2, on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}_+^*) (y = exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y))$$

Soit x un réel positif et y un réel strictement positif. On a alors :

$$y = exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y) = \frac{\ln y}{\ln a} \Leftrightarrow \ln y = x \ln a \Leftrightarrow y = e^{x \ln a}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$exp_a(x) = e^{x \ln a}$$

3-2/ Propriétés algébriques

Proposition 9

Soient x et y deux réels et r un nombre rationnel . Alors :

$$exp_a(x + y) = exp_a(x) \cdot exp_a(y)$$

$$exp_a(x - y) = \frac{exp_a(x)}{exp_a(y)}$$

$$exp_a(rx) = (exp_a(x))^r$$

3-3/ Une autre écriture de la fonction exp_a

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

$$\text{On a : } \exp_a(1) = e^{\ln a} = a$$

$$\text{Et puisque pour tout } r \in \mathbb{Q} : \exp_a(r) = (\exp_a(1))^r = a^r$$

On prolonge cette écriture sur l'ensemble des nombres réels en écrivant pour tout $x \in \mathbb{R} : \exp_a(x) = a^x$

Proposition 10

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

Alors :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}_+^*) y = a^x &\Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a} \\ (\forall x \in \mathbb{R}) \log_a(a^x) &= x \\ (\forall x \in \mathbb{R}_+^*) a^{\log_a(x)} &= x \\ (\forall x, y \in \mathbb{R}) a^{x+y} &= a^x \cdot a^y \text{ et } a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \end{aligned}$$

Remarque

On a supposé que $a > 0$ et $a \neq 1$, et après avoir prolongé l'écriture expa sous la forme d'une puissance de a , on a obtenu : $(\forall x \in \mathbb{R}) a^x = e^{x \ln a}$

Le fait que $e^0 = 1$ nous conduit à poser « par convention » : $1^x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a donc : } (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall a \in \mathbb{R}_+^*) a^x = e^{x \ln a}$$

Proposition 11

Soit a et b deux réels strictement positifs.

Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x \times a^y ; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} ; \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \\ (a^x)^y &= a^{xy} ; \quad (ab)^x = a^x \cdot b^x ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \end{aligned}$$

3-4/ Étude de la fonction \exp_a

Proposition 12

La fonction \exp_a est dérivable sur \mathbb{R} , et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\exp_a)'(x) = (a^x)' = (\ln a)a^x$$

Proposition 13

Si $a > 1$ alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$$

Si $0 < a < 1$ alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} :

$$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$$

Proposition 14

Si $a > 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

Si $0 < a < 1$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.