AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 5-2-1 : Fonctions exponentielles - Partie 2 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

III- Fonction exponentielle de base a

3-1/ Définition de la fonction exponentielle de base a

Définition 2

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction exponentielle de base a est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$.

On la note exp_a.

Remarques

D'après la définition 2, on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\left(\forall y \in \mathbb{R}_+^*\right)\ \left(y = exp_a\left(x\right) \Leftrightarrow x = \log_a\left(y\right)\right)$$

Soit x un réel positif et y un réel strictement positif. On a alors :

$$y = exp_a\left(x\right) \Leftrightarrow x = \log_a\left(y\right) = \frac{\ln y}{\ln a} \Leftrightarrow \ln y = x \ln a \Leftrightarrow y = e^{x \ln a}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$exp_a\left(x\right) = e^{x \ln a}$$

3-2/ Propriétés algébriques

Proposition 9

Soient x et y deux réels et r un nombre rationnel . Alors :

$$exp_a\left(x + y\right) = exp_a\left(x\right).\, exp_a\left(y\right)$$
$$exp_a\left(x - y\right) = \frac{exp_a(x)}{exp_a(y)}$$
$$exp_a\left(rx\right) = \left(exp_a\left(x\right)\right)^r$$

3-3/ Une autre écriture de la fonction exp_a

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

On a : $exp_a\left(1\right)=e^{\ln a}=a$

Et puisque pour tout $r\in\mathbb{Q}$: $exp_a\left(r\right)=\left(exp_a\left(1\right)\right)^r=a^r$

On prolonge cette écriture sur l'ensemble des nombres réels en écrivant pour tout $x\in\mathbb{R}$: $exp_a\left(x\right)=a^x$

Proposition 10

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

Alors :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\forall y\in\mathbb{R}_+^*\right)\ y=a^x\Leftrightarrow x=\frac{\ln y}{\ln a}$$
$$\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\ \log_a\left(a^x\right)=x$$
$$\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)\ a^{\log_a(x)}=x$$
$$\left(\forall x,y\in\mathbb{R}\right)\ a^{x+y}=a^x.a^y\ \ et\ \ a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}$$

Remarque

On a supposé que $a>0$ et $a\neq 1$, et après avoir prolongé l'écriture expa sous la forme d'une puissance de a, on a obtenu : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\ a^x=e^{x\ln a}$

Le fait que $e^0=1$ nous conduit à poser « par convention » : $1^x=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

On a donc : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\left(\forall a\in\mathbb{R}_+^*\right)\ a^x=e^{x\ln a}$

Proposition 11

Soit a et b deux réels strictement positifs.

Alors, pour tout $\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2$:

$$a^{x+y}=a^x\times a^y\ \ ;\ \ a^{-x}=\frac{1}{a^x}\ \ ;\ \ a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}$$

$$\left(a^x\right)^y=a^{xy}\ \ ;\ \ \left(ab\right)^x=a^x.b^x\ \ ;\ \ \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$$

3-4/ Étude de la fonction exp_a

Proposition 12

La fonction exp_a est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\left(exp_a\right)'\left(x\right)=\left(a^x\right)'=\left(\ln a\right)a^x$$

Proposition 13

Si $a>1$ alors la fonction $x\mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\left(\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\right)\ x<y\Leftrightarrow a^x<a^y$$

Si $0<a<1$ alors la fonction $x\mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:

$$\left(\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\right)\ x<y\Leftrightarrow a^x>a^y$$

Proposition 14

Si $a>1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$.

Si $0 < a < 1$ alors $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.