

## Sommaire

### I- Fonction exponentielle népérienne

1-1/ Définition et propriétés élémentaires

1-2/ Propriétés algébriques

1-3/ Une autre écriture de la fonction exp

1-4/ Dérivée de la fonction exponentielle népérienne

1-5/ Limites fondamentales

---

### I- Fonction exponentielle népérienne

1-1/ Définition et propriétés élémentaires

#### Définition 1

La fonction réciproque de la fonction logarithme népérienne est appelée la fonction exponentielle népérienne (ou la fonction exponentielle), et on la note  $exp$ .

#### Remarques

La fonction  $\ln$  est une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}$  :  $(\forall \beta \in \mathbb{R}) (\exists! \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \beta = \ln(\alpha)$

Par définition de la fonction  $exp$  :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}_+^*) (y = exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y))$$

$$exp(0) = 1 \text{ et } exp(1) = e \text{ car } \ln(1) = 0 \text{ et } \ln(e) = 1.$$

#### Proposition 1

La fonction  $exp$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

La fonction  $exp$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $exp(x) > 0$  et  $\ln(exp(x)) = x$ .

On a pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  :  $exp(\ln x) = x$ .

#### Corollaire

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :  $exp(x) = exp(y) \Leftrightarrow x = y$  et  $exp(x) < exp(y) \Leftrightarrow x < y$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  : ( $\exp(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ) et ( $\exp(x) < 1 \Leftrightarrow x < 0$ ) et ( $\exp(x) > 1 \Leftrightarrow x > 0$ ).

## 1-2/ Propriétés algébriques

### Proposition 2

Pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a :  $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

### Proposition 3

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tous réels  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , on a :

$$\exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \dots \times \exp(x_n)$$

c'est-à-dire :

$$\exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) = \prod_{k=1}^n \exp(x_k)$$

### Proposition 4

Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels, et  $r$  un nombre rationnel.

Alors :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} ; \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} ; \exp(rx) = (\exp(x))^r$$

## 1-3/ Une autre écriture de la fonction exp

On a  $\exp(1) = e$ .

On a déjà vu que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et pour tout  $r \in \mathbb{Q}$  :  $\exp(rx) = (\exp(x))^r$

En particulier pour  $x = 1$  :  $\exp(r) = (\exp(1))^r = e^r$

On prolongera cette écriture en notant pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\exp(x) = e^x$

Remarquons enfin que cette nouvelle notation est compatible avec les notations des puissances connues.

Avec cette nouvelle notation, on résumera les résultats vus précédemment comme suit :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}_+^*) & : y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \\ (\forall x \in \mathbb{R}) & : e^x > 0 \\ (\forall x \in \mathbb{R}) & : \ln(e^x) = x \\ (\forall x \in \mathbb{R}_+^*) & : e^{\ln x} = x \\ (\forall x, y \in \mathbb{R}) & : (e^x = e^y \Leftrightarrow x = y) \text{ et } (e^x < e^y \Leftrightarrow x < y) \\ (\forall x, y \in \mathbb{R}) & : (e^{x+y} = e^x \times e^y) \text{ et } (e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}) \\ (\forall x, y \in \mathbb{R}) (\forall r \in \mathbb{Q}) & : e^{rx} = (e^x)^r \end{aligned}$$

## 1-4/ Dérivée de la fonction exponentielle népérienne

### Proposition 5

La fonction  $\exp$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on a :  $(\forall x \in \mathbb{R}) \exp'(x) = \exp(x)$

Ce qui s'écrit aussi :  $(\forall x \in \mathbb{R}) (e^x)' = e^x$

### Proposition 6

Si  $u$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  alors la fonction  $x \mapsto e^{u(x)}$  est dérivable sur  $I$  et on a :

$$(\forall x \in I) (e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

### Corollaire

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Les primitives de la fonction  $x \mapsto u'(x) \cdot e^{u(x)}$  sur  $I$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto e^{u(x)} + \lambda$  où  $\lambda$  est une constante réelle.

## 1-5/ Limites fondamentales

### Proposition 7

On a les limites fondamentales suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty ; & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 ; & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x &= 0 ; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \end{aligned}$$

Si  $\alpha$  est un réel non nul alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x} = \alpha ; \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{e^x - e^\alpha}{x - \alpha} = e^\alpha$$

### Proposition 8

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} &= 0 \end{aligned}$$