

Sommaire

I- Fonction exponentielle népérienne

1-1/ Définition et propriétés élémentaires

1-2/ Propriétés algébriques

1-3/ Une autre écriture de la fonction \exp

1-4/ Dérivée de la fonction exponentielle népérienne

1-5/ Limites fondamentales

I- Fonction exponentielle népérienne

1-1/ Définition et propriétés élémentaires

Définition 1

La fonction réciproque de la fonction logarithme népérienne est appelée la fonction exponentielle népérienne (ou la fonction exponentielle), et on la note \exp .

Remarques

La fonction \ln est une bijection de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} : $(\forall \beta \in \mathbb{R}) \ (\exists! \alpha \in \mathbb{R}_+^*) \ \beta = \ln(\alpha)$

Par définition de la fonction \exp :

$(\forall x \in \mathbb{R}) \ (\forall y \in \mathbb{R}_+^*) \ (y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y))$

$\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$ car $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

Proposition 1

La fonction \exp est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* .

La fonction \exp est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) > 0$ et $\ln(\exp(x)) = x$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\exp(\ln x) = x$.

Corollaire

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y$ et
 $\exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(\exp(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0)$ et $(\exp(x) < 1 \Leftrightarrow x < 0)$ et $(\exp(x) > 1 \Leftrightarrow x > 0)$.

1-2/ Propriétés algébriques

Proposition 2

Pour tous réels x et y , on a : $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Proposition 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels x_1, x_2, \dots, x_n , on a :

$$\exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \dots \times \exp(x_n)$$

c'est-à-dire :

$$\exp\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) = \prod_{k=1}^n \exp(x_k)$$

Proposition 4

Soit x et y deux nombres réels, et r un nombre rationnel.

Alors :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} ; \quad \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} ; \quad \exp(rx) = (\exp(x))^r$$

1-3/ Une autre écriture de la fonction \exp

On a $\exp(1) = e$.

On a déjà vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $\exp(rx) = (\exp(x))^r$

En particulier pour $x = 1$: $\exp(r) = (\exp(1))^r = e^r$

On prolongera cette écriture en notant pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\exp(x) = e^x$

Remarquons enfin que cette nouvelle notation est compatible avec les notations des puissances connues.

Avec cette nouvelle notation, on résumera les résultats vus précédemment comme suit :

$$\begin{aligned} & (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}_+^*) : y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y \\ & (\forall x \in \mathbb{R}) : e^x > 0 \\ & (\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(e^x) = x \\ & (\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : e^{\ln x} = x \\ & (\forall x, y \in \mathbb{R}) : (e^x = e^y \Leftrightarrow x = y) \text{ et } (e^x < e^y \Leftrightarrow x < y) \\ & (\forall x, y \in \mathbb{R}) : (e^{x+y} = e^x \times e^y) \text{ et } (e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}) \\ & (\forall x, y \in \mathbb{R}) (\forall r \in \mathbb{Q}) : e^{rx} = (e^x)^r \end{aligned}$$

1-4/ Dérivée de la fonction exponentielle népérienne

Proposition 5

La fonction \exp est dérivable sur \mathbb{R} , et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) \exp'(x) = \exp(x)$

Ce qui s'écrit aussi : $(\forall x \in \mathbb{R}) (e^x)' = e^x$

Proposition 6

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$(\forall x \in I) \quad (e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Les primitives de la fonction $x \mapsto u'(x) \cdot e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)} + \lambda$ où λ est une constante réelle.

1-5/ Limites fondamentales

Proposition 7

On a les limites fondamentales suivantes :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x &= 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \end{aligned}$$

Si α est un réel non nul alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x} = \alpha \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{e^x - e^\alpha}{x - \alpha} = e^\alpha$$

Proposition 8

Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} &= 0 \end{aligned}$$