AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 4-3 : Fonctions logarithmiques - Problème de synthèse

**Professeur : Mr CHEDDADI Haitam**

Sommaire


V- Problème de synthèse

5-1/ Partie 1 : Existence et unicité d'une racine positive $x$ de $(E_n)$

5-2/ Partie 2 : Étude de la fonction auxiliaire $f$

5-3/ Partie 3 : Étude de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$


---

## V- Problème de synthèse

### 5-1/ Partie 1 : Existence et unicité d'une racine positive $x$ de $(E_n)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation sur $\mathbb{R}^*$ : $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

On étudiera $(E_n)$ à l'aide de la fonction auxiliaire $f$ : $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$

1. Résoudre l'équation pour $n = 1$ et $n = 2$.
2. Étudier les variations de la fonction numérique $x \mapsto x^n + x - 1$ sur $[0; +\infty[$ pour $n \geq 1$.
3. En déduire que l'équation $(E_n)$ admet une et une seule racine positive qu'on notera $x_n$, et montrer que $0 < x_n < 1$.

### 5-2/ Partie 2 : Étude de la fonction auxiliaire $f$

1. Déterminer le domaine de définition de $f$ et les limites de $f$ aux extrémités de celui-ci.
2. Calculer alors $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de $f$.

### 5-3/ Partie 3 : Étude de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$

1. Montrer que $f(x_n) = n$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.
3. En déduire la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.
4. Préciser la valeur de la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.