AlloSchool

Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 2 (Généralités sur les fonctions)

**Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak**

Sommaire

I- Rappels

1-1/ Fonction numérique

1-2/ Fonction paire – fonction impaire

1-3/ Monotonie d'une fonction numérique

1-4/ Taux d'accroissement d'une fonction $f$

II- Fonction majorée – Fonction minorée – Fonction bornée

2-1/ Définitions

2-2/ Extremums d'une fonction

2-3/ Fonction périodique

III- Comparaison de deux fonctions et interprétation géométrique

3-1/ Égalité de deux fonctions

3-2/ Comparaison de deux fonctions

IV- Composée de deux fonctions

4-1/ Vocabulaire

4-2/ Définition

4-3/ Monotonie de fonctions composées

V- Étude et représentation graphique de certaines fonctions

5-1/ Fonction $f(x) = ax^3 \ (a \neq 0)$

5-2/ Fonction $f(x) = \sqrt{x+a}$

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

6-5/ Exercice 5
6-6/ Exercice 6

---

# I- Rappels

## 1-1/ Fonction numérique

Toute relation $f$ qui associe chaque élément $x$ au plus de $\mathbb{R}$ par un élément $y$ de $\mathbb{R}$ est appelée fonction numérique de la variable réelle $x$.

On note : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x)$

Tous les éléments $x$ de qui ont images par $f$ constituent un ensemble qu'on l'appelle ensemble de définition (ou encore domaine de définition), on le note $\mathscr{D}_f$ ou $D_f$.

## 1-2/ Fonction paire – fonction impaire

$f$ est une fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur $D_f$.

$f$ est paire sur $D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f\ ,\ -x \in D_f \\ \forall x \in D_f\ ,\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

$f$ est impaire sur $D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f\ ,\ -x \in D_f \\ \forall x \in D_f\ ,\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

## 1-3/ Monotonie d'une fonction numérique

### définition :

$f$ est une fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur un intervalle $I$.

$f$ est une fonction croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$

$f$ est une fonction strictement croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) < f(x'))$

$f$ est une fonction décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x'))$

$f$ est une fonction strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) > f(x'))$

$f$ est une fonction constante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; f(x) = f(x'))$

## 1-4/ Taux d'accroissement d'une fonction $f$

### Définition

$f$ est une fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur un intervalle $I$.

Soient $x, x' \in I$ tel que $x \neq x'$, le nombre $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ s'appelle le taux d'accroissement de la fonction $f$ entre $x$ et $x'$, on le note $T_f$.

### Propriétés

$T_f$ est le taux d'accroissement de la fonction $f$ sur l'intervalle $I$.

Si $T_f \leq 0$ alors la fonction $f$ est décroissante sur $I$.

Si $T_f < 0$ alors la fonction $f$ est strictement décroissante sur $I$.

Si $T_f \geq 0$ alors la fonction $f$ est décroissante sur $I$.

Si $T_f > 0$ alors la fonction $f$ est strictement décroissante sur $I$.

Si $T_f = 0$ alors la fonction $f$ est constante sur $I$.

# II- Fonction majorée – Fonction minorée – Fonction bornée

## 2-1 Définitions

$f$ est une fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur $I \subset D_f$.

Soient $M, m \in \mathbb{R}$

La fonction $f$ est majorée par $M$ sur $I$ si et seulement si $\forall x \in I\ ;\ f(x) \leq M$.

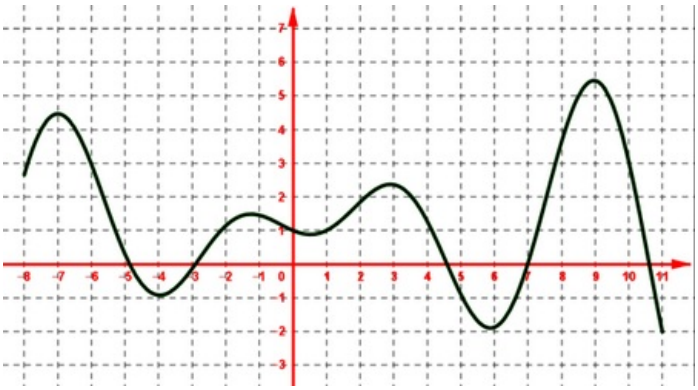
La fonction $f$ est minorée par $m$ sur $I$ si et seulement si $\forall x \in I\ ;\ f(x) \geq m$.

La fonction $f$ est bornée sur $I$ si et seulement si $f$ est majorée et minorée sur $I$.

### Remarque

La fonction $f$ est bornée sur $I \Leftrightarrow (\exists A \in \mathbb{R}^+\ ,\ \forall x \in I\ :\ |f(x)| \leq A)$

### Exemple



## 2-2/ Extremums d'une fonction

$f$ est une fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur $D_f$ tel que $x_0 \in D_f$.

$f(x_0)$ est valeur maximale absolue de $f$ si et seulement si $\forall x \in D_f\ ,\ f(x) \leq f(x_0)$.

$f(x_0)$ est valeur minimale absolue de $f$ si et seulement si $\forall x \in D_f\ ,\ f(x) \geq f(x_0)$.

## 2-3/ Fonction périodique

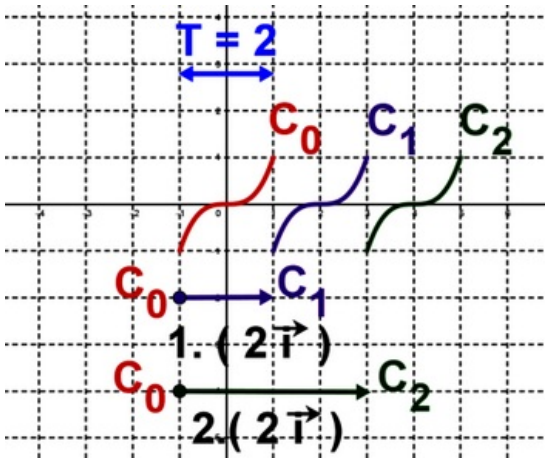
$f$ est une fonction numérique de la variable réelle $x$ définie sur $D_f$.

Soit $T \in \mathbb{R}^{+}*$

La fonction $f$ est périodique sur $D_f$ et son période est $T$ si et seulement si :

① $x \in D_f \Rightarrow (x + T \in D_f \ et\ x - T \in D_f)$

② $\forall x \in D_f\ :\ f(x + T) = f(x)$




# III- Comparaison de deux fonctions et interprétation géométrique

## 3-1/ Égalité de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions numériques dont les ensembles de définition sont respectivement Df et Dg.

On dit que f et g sont égales, et on note f = g, si $\begin{cases} D_f = D_g \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

## 3-2/ Comparaison de deux fonctions

Soient $f$ et g deux fonctions définies sur $I$.

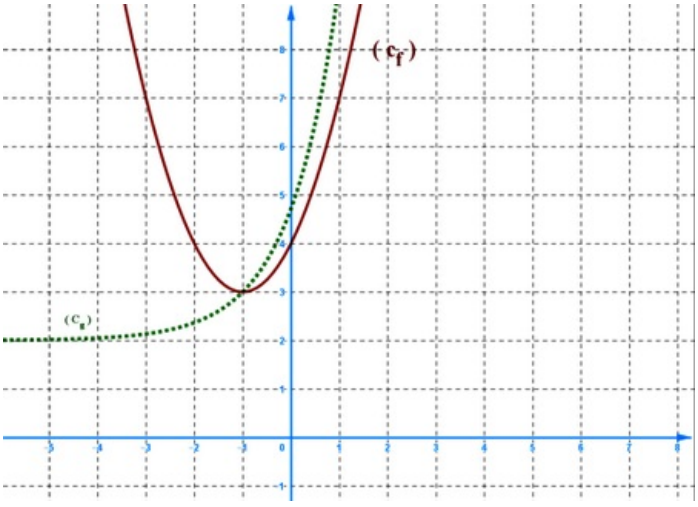
- $(f \leq g$ sur $I) \Leftrightarrow (\forall x \in I \ : \ f(x) \leq g(x))$. La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est située au dessous de la courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$ sur $I$.

- $(f > g$ sur $I) \Leftrightarrow (\forall x \in I \ : \ f(x) > g(x))$. La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est située strictement au dessus de la courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$ sur $I$.

- $(f = g$ sur $I) \Leftrightarrow (\forall x \in I \ : \ f(x) = g(x))$. La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et la courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$ sont confondues sur $I$.

- $f$ est une fonction positive sur $D_f$ si et seulement si $\forall x \in D_f \ : \ f(x) \geq 0$. La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de $f$ est située au dessus de l'axe des abscisses.

- $f$ est une fonction strictement négative sur $D_f$ si et seulement si . La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de $f$ est située strictement au dessous de l'axe des abscisses.




# IV- Composée de deux fonctions

## 4-1/ Vocabulaire

La fonction $h : x \to h(x) = g(f(x))$, on la note par $h = g \circ f$, d'où :
$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$.

La fonction $g \circ f$ est appelée la composée des fonction $f$ et $g$ dans cet ordre.

On peut faire le diagramme suivant pour $g \circ f$ :

$$\begin{array}{ccccccc} h = g \circ f : D_f & \xrightarrow{f} & f(D_f) \subset D_g & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \in D_g & \mapsto & g(f(x)) = g \circ f(x) = h(x) \end{array}$$

## 4-2/ Définition

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies respectivement sur $D_f$ et $D_g$ et $f(D_f) \subset D_g$.

On pose : $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$.

La fonction $h$ définie sur $D_{g \circ f}$ par $h(x) = g(f(x))$ est appelée la composée des fonction $f$ et $g$ dans cet ordre.

On note $h = g \circ f$.

## 4-3/ Monotonie de fonctions composées

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies respectivement sur $D_f$ et $D_g$ et $f(D_f) \subset D_g$.

- Si $f$ et $g$ ont même monotonie (strictement monotone) respectivement sur $D_f$ et $f(D_f) \subset D_g$, alors $g \circ f$ est croissante sur $D_f$ ($g \circ f$ est strictement croissante sur $D_f$).

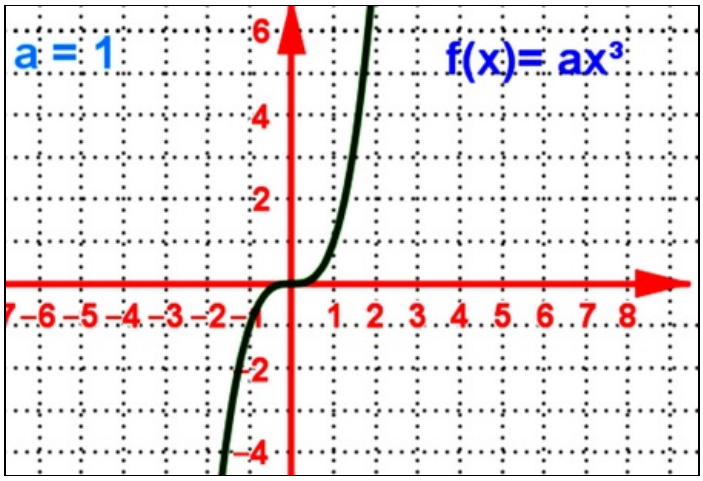
- Si $f$ et $g$ ont monotonie (strictement monotone) opposées respectivement sur $D_f$ et $f(D_f) \subset D_g$, alors $g \circ f$ est décroissante sur $D_f$ ($g \circ f$ est strictement décroissante sur $D_f$).

# V- Étude et représentation graphique de certaines fonctions

## 5-1/ Fonction $f(x) = ax^3$ $(a \neq 0)$

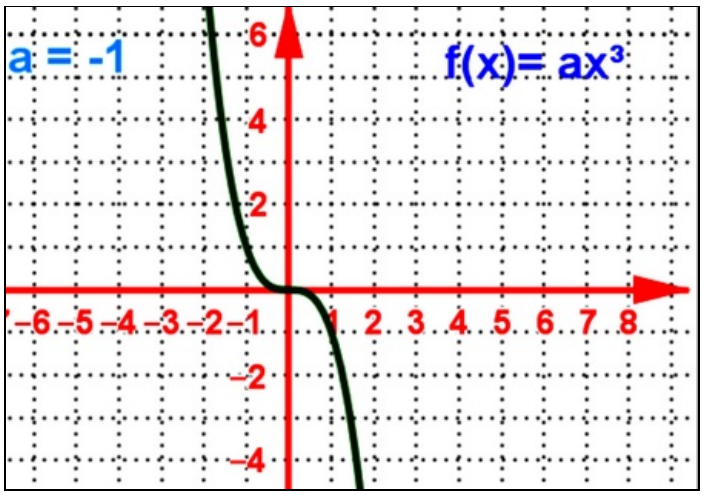
### 1er cas $(a > 0)$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↗ | $0$ | ↗ |



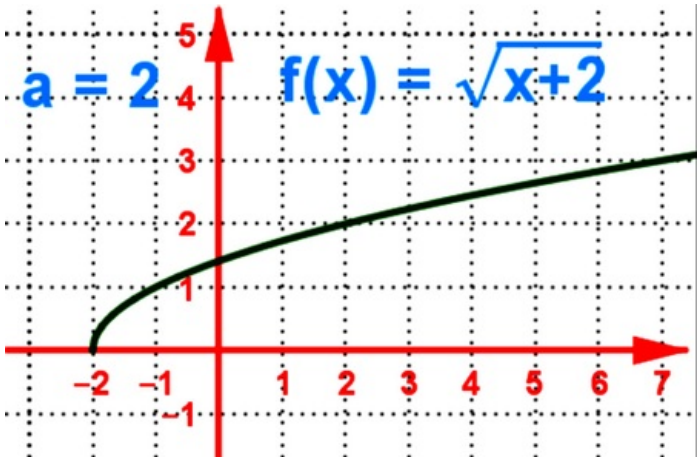

**2nd cas** $(a < 0)$

| x | $-\infty$ 0 $+\infty$ |
|---|---|
| f(x) | ↘ 0 ↘ |




5-2/ Fonction $f(x) = \sqrt{x+a}$

| x | $-a$ $+\infty$ |
|---|---|
| f(x) | 0 ↗ |



# VI- Exercices

## 6-1/ Exercice 1

1. Montrer que la fonction $f$ est majorée par $M$ dans chacune des cas suivantes :

a) $f(x) = -x^2 + 2x$ et $M = 1$.

b) $f\left(x\right) = \frac{3x^2+2}{x^2+1}$ et $M = 3$.

c) $f\left(x\right) = \frac{4}{x^2+2}$ et $M = 2$.

2. Montrer que la fonction $f$ est minorée par $m$ dans chacune des cas suivantes :

a) $f(x) = x^2 + 4x$ et $m = -4$.

b) $f\left(x\right) = \sqrt{x^2+1}$ et $m = 1$.

3. Montrer que la fonction $f$ est bornée par $M$ et $m$ dans chacune des cas suivantes :

a) $f\left(x\right) = \frac{1}{x^2+1}$ et $M = 0$ et $m = -1$.

b) $f\left(x\right) = \sin(x) + \sqrt{3}$ et $M = 3$ et $m = 0$.

## 6-2/ Exercice 2

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = x^2 + 2x + 3$

1. Montrer que $f(-1)$ est le minimum de $f$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $g$ la fonction définie par : $g\left(x\right) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

2. Montrer que $g(-1)$ est le maximum de $g$ sur $\mathbb{R}$.

## 6-3/ Exercice 3

Soient $f$ et $g$ deux fonctions.

Déterminer $D_{g\circ f}$ l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$, et $D_{f\circ g}$ l'ensemble de définition de la fonction $f \circ g$, et déterminer les expressions $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$, dans chacune des cas suivantes :

$$1\ \ f(x) = x^2\ \ ;\ \ g(x) = x^3$$
$$2\ \ f(x) = x^2 - 5\ \ ;\ \ g(x) = \frac{1}{x}$$
$$3\ \ f(x) = \sqrt{x}\ \ ;\ \ g(x) = x^2$$
$$4\ \ f(x) = \sqrt{x-8}\ \ ;\ \ g(x) = x^3$$

## 6-4/ Exercice 4

Déterminer les variations de la fonction $f$ dans chacune des cas suivantes :

| | |
|---|---|
| $1\ \ f(x) = x^2 + \sqrt{2}$ | $5\ \ f(x) = x^2 - 6$ |
| $2\ \ f(x) = x^3 - 5$ | $6\ \ f(x) = \frac{-\sqrt{3}+1}{x}$ |
| $3\ \ f(x) = \frac{8}{x}$ | $7\ \ f(x) = \sqrt{x-5} + 6$ |
| $4\ \ f(x) = -3\sqrt{x-3} + 5$ | $8\ \ f(x) = -6x^3 + 9$ |

## 6-5/ Exercice 5

En utilisant la propriété de la monotonie de la composée de deux fonction, étudier la monotonie de la fonction $f$ sur les intervalle $I$ et $J$ dans chacune des cas suivantes :

$$1\ f(x)=\sqrt{x^2+1}\ ;\ I=\mathbb{R}^+\ ;\ J=\mathbb{R}^-$$
$$2\ f(x)=\frac{1}{x^2+3}\ ;\ I=\mathbb{R}^+\ ;\ J=\mathbb{R}^-$$
$$3\ f(x)=\sin^2(x)\ ;\ I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\ ;\ J=\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$$

## 6-6/ Exercice 6

1. Représenter graphiquement la fonction $f$ dans chacune des cas suivantes :

| | |
|---|---|
| $1\ f(x)=\sqrt{x-2}$ | $4\ f(x)=\frac{2}{x^3}$ |
| $2\ f(x)=\sqrt{x+3}$ | $5\ f(x)=\sqrt{x-1}+2$ |
| $3\ f(x)=\frac{-4}{x^3}$ | $6\ f(x)=\frac{1}{x^3}+1$ |

Soient $f$ et $g$ deux fonctions telles que $f(x)=\frac{4}{x^3}$ et $g(x)=\sqrt{x+2}$.

2. Représenter graphiquement $f$ et $g$.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$.
4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)<g(x)$.
5. Vérifier algébriquement les solutions précédentes.