Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 2 (Généralités sur les fonctions)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Rappels

1-1/ Fonction numérique

Toute relation f qui associe chaque élément x au plus de $\mathbb{R}$ par un élément y de $\mathbb{R}$ est appelée fonction numérique de la variable réelle x.

On note : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto f\left(x\right)$

Tous les éléments x de qui ont images par f constituent un ensemble qu'on l'appelle ensemble de définition (ou encore domaine de définition), on le note $\mathscr{D}_f$ ou D_f.

1-2/ Fonction paire – fonction impaire

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f.

f est paire sur $D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f\ ,\ \ -x \in D_f \\ \forall x \in D_f\ ,\ f\left(-x\right) = f\left(x\right) \end{cases}$

f est impaire sur $D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f\ ,\ \ -x \in D_f \\ \forall x \in D_f\ ,\ f\left(-x\right) = -f\left(x\right) \end{cases}$

1-3/ Monotonie d'une fonction numérique

définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur un intervalle I.

f est une fonction croissante sur $I \Leftrightarrow \left(\forall x, x' \in I; x \leq x' \Rightarrow f\left(x\right) \leq f\left(x'\right)\right)$

f est une fonction strictement croissante sur
$I \Leftrightarrow \left(\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f\left(x\right) < f\left(x'\right)\right)$

f est une fonction décroissante sur $I \Leftrightarrow \left(\forall x, x' \in I; x \leq x' \Rightarrow f\left(x\right) \geq f\left(x'\right)\right)$

f est une fonction strictement décroissante sur
$I \Leftrightarrow \left(\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f\left(x\right) > f\left(x'\right)\right)$

f est une fonction constante sur $I \Leftrightarrow \left(\forall x, x' \in I; f\left(x\right) = f\left(x'\right)\right)$

1-4/ Taux d'accroissement d'une fonction f

Définition

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur un intervalle I.

Soient $x, x' \in I$ tel que $x \neq x'$, le nombre $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ s'appelle le taux d'accroissement de la fonction f entre x et x', on le note T_f.

Propriétés

T_f est le taux d'accroissement de la fonction f sur l'intervalle I.

Si $T_f \leq 0$ alors la fonction f est décroissante sur I.

Si $T_f < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Si $T_f \geq 0$ alors la fonction f est décroissante sur I.

Si $T_f > 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Si $T_f = 0$ alors la fonction f est constante sur I.

II- Fonction majorée – Fonction minorée – Fonction bornée

2-1 Définitions

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur $I \subset D_f$.

Soient $M, m \in \mathbb{R}$

La fonction f est majorée par M sur I si et seulement si $\forall x \in I\ ;\ f(x) \leq M$.

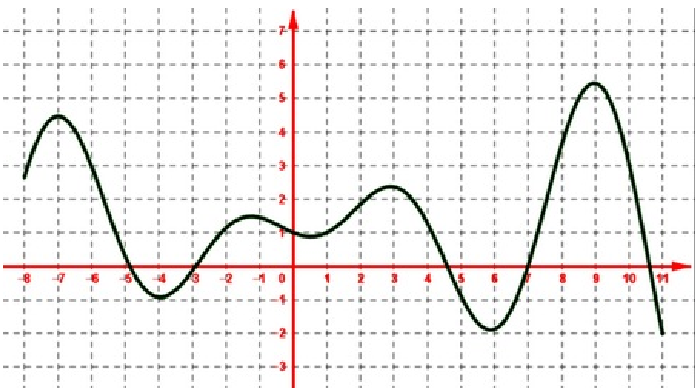
La fonction f est minorée par m sur I si et seulement si $\forall x \in I\ ;\ f(x) \geq m$.

La fonction f est bornée sur I si et seulement si f est majorée et minorée sur I.

Remarque

La fonction f est bornée sur $I \Leftrightarrow (\exists A \in \mathbb{R}^+ \ ,\ \forall x \in I\ :\ |f(x)| \leq A)$

Exemple



2-2/ Extremums d'une fonction

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f tel que $x_0 \in D_f$.

$f(x_0)$ est valeur maximale absolue de f si et seulement si $\forall x \in D_f\ ,\ f(x) \leq f(x_0)$.

$f(x_0)$ est valeur minimale absolue de f si et seulement si $\forall x \in D_f\ ,\ f(x) \geq f(x_0)$.

2-3/ Fonction périodique

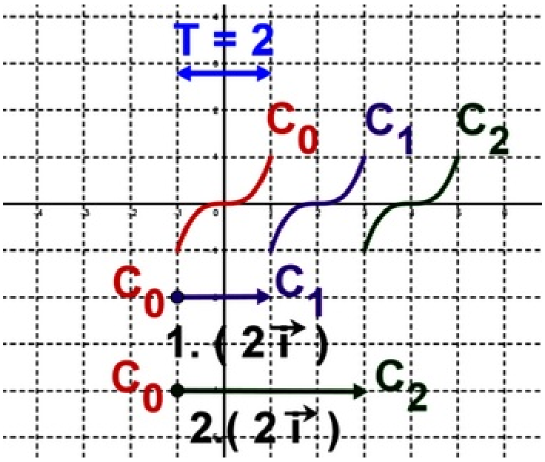
f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f.

Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$

La fonction f est périodique sur D_f et son période est T si et seulement si :

① $x \in D_f \Rightarrow \left(x + T \in D_f \; et \; x - T \in D_f\right)$

② $\forall x \in D_f \;:\; f\left(x + T\right) = f\left(x\right)$



III- Comparaison de deux fonctions et interprétation géométrique

3-1/ Égalité de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions numériques dont les ensembles de définition sont respectivement Df et Dg.

On dit que f et g sont égales, et on note f = g, si $\begin{cases} D_f = D_g \\ f\left(x\right) = g(x) \end{cases}$

3-2/ Comparaison de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur I.

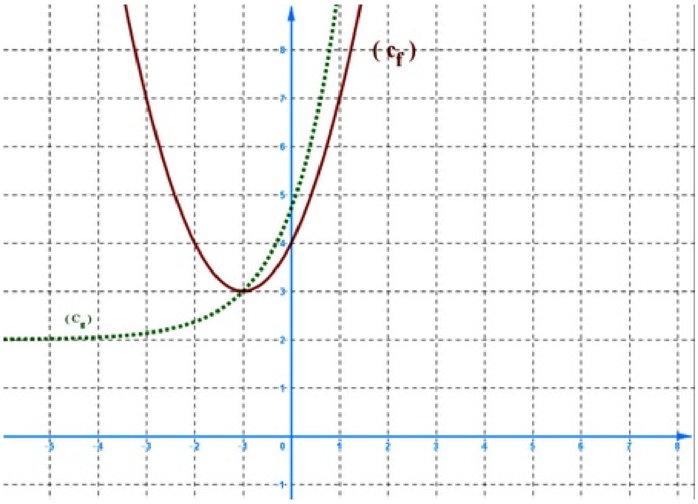
- $(f \leq g$ sur $I) \Leftrightarrow (\forall x \in I \;:\; f\left(x\right) \leq g\left(x\right))$. La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est située au dessous de la courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$ sur I.

- $(f > g$ sur $I) \Leftrightarrow (\forall x \in I \;:\; f\left(x\right) > g\left(x\right))$. La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ est située strictement au dessus de la courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$ sur I.

- $(f = g$ sur $I) \Leftrightarrow (\forall x \in I \;:\; f\left(x\right) = g\left(x\right))$. La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ et la courbe $\left(\mathscr{C}_g\right)$ sont confondues sur I.

- f est une fonction positive sur D_f si et seulement si $\forall x \in D_f \;:\; f\left(x\right) \geq 0$. La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de f est située au dessus de l'axe des abscisses.

- f est une fonction strictement négative sur D_f si et seulement si . La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de f est située strictement au dessous de l'axe des abscisses.



IV- Composée de deux fonctions

4-1/ Vocabulaire

La fonction $h : x \to h(x) = g(f(x))$, on la note par $h = g \circ f$, d'où :
$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$.

La fonction $g \circ f$ est appelée la composée des fonction f et g dans cet ordre.

On peut faire le diagramme suivant pour $g \circ f$:

$$\begin{array}{llll} h = g \circ f : D_f & \xrightarrow{f} f(D_f) \subset D_g & \xrightarrow{g} \mathbb{R} & \\ x \mapsto & f(x) \in D_g & \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x) = h(x) & \end{array}$$

4-2/ Définition

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et
$f(D_f) \subset D_g$.

On pose : $D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in D_f \ et \ f(x) \in D_g \right\}$.

La fonction h définie sur $D_{g \circ f}$ par $h(x) = g(f(x))$ est appelée la composée des fonction f et g dans cet ordre.

On note $h = g \circ f$.

4-3/ Monotonie de fonctions composées

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et
$f(D_f) \subset D_g$.

- Si f et g ont même monotonie (strictement monotone) respectivement sur D_f et $f(D_f) \subset D_g$, alors $g \circ f$ est croissante sur D_f ($g \circ f$ est strictement croissante sur D_f).

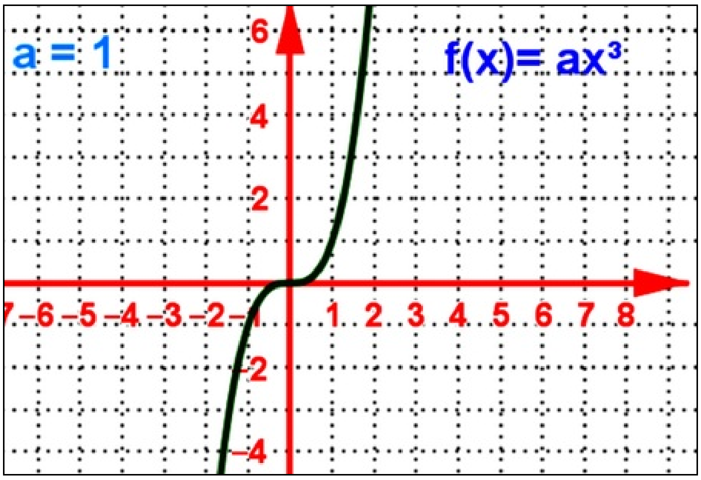
- Si f et g ont monotonie (strictement monotone) opposées respectivement sur D_f et $f(D_f) \subset D_g$, alors $g \circ f$ est décroissante sur D_f ($g \circ f$ est strictement décroissante sur D_f).

V- Étude et représentation graphique de certaines fonctions

5-1/ Fonction $f(x) = ax^3 \ (a \neq 0)$

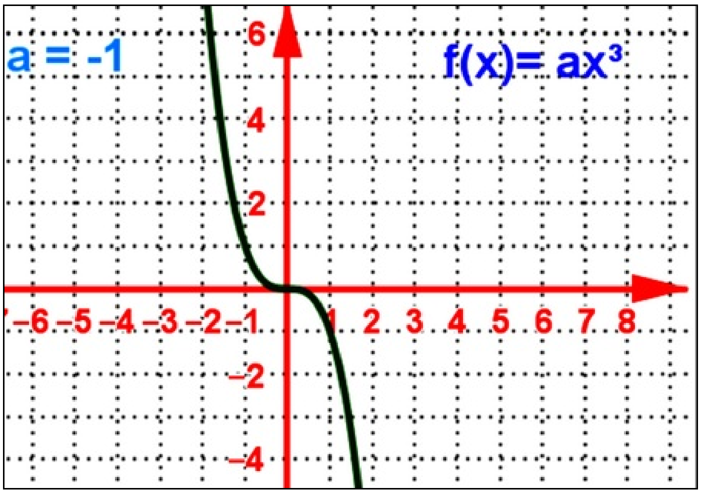
1er cas $(a > 0)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)		$\nearrow$	0	$\nearrow$	



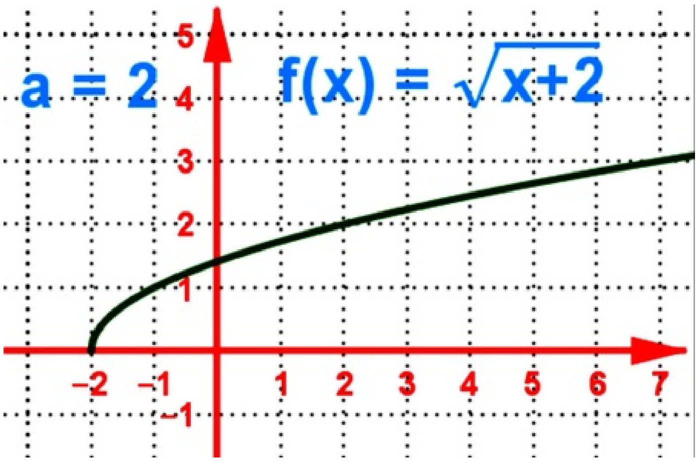
2nd cas $(a < 0)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f(x)		$\searrow$	0	$\searrow$	



5-2/ Fonction $f(x) = \sqrt{x + a}$

x	$-a$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	



VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

1. Montrer que la fonction f est majorée par M dans chacune des cas suivantes :

a) $f(x) = -x^2 + 2x$ et $M = 1$.

b) $f\left(x\right) = \frac{3x^2+2}{x^2+1}$ et $M = 3$.

c) $f\left(x\right) = \frac{4}{x^2+2}$ et $M = 2$.

2. Montrer que la fonction f est minorée par m dans chacune des cas suivantes :

a) $f(x) = x^2 + 4x$ et $m = -4$.

b) $f\left(x\right) = \sqrt{x^2+1}$ et $m = 1$.

3. Montrer que la fonction f est bornée par M et m dans chacune des cas suivantes :

a) $f\left(x\right) = \frac{1}{x^2+1}$ et $M = 0$ et $m = -1$.

b) $f\left(x\right) = \sin\left(x\right) + \sqrt{3}$ et $M = 3$ et $m = 0$.

6-2/ Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f\left(x\right) = x^2 + 2x + 3$

1. Montrer que $f\left(-1\right)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Soit g la fonction définie par : $g\left(x\right) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

2. Montrer que $g(-1)$ est le maximum de g sur $\mathbb{R}$.

6-3/ Exercice 3

Soient f et g deux fonctions.

Déterminer $D_{g\circ f}$ l'ensemble de définition de la fonction $g\circ f$, et $D_{f\circ g}$ l'ensemble de définition de la fonction $f\circ g$, et déterminer les expressions $g\circ f\left(x\right)$ et $f\circ g\left(x\right)$, dans chacune des cas suivantes :

$$1\ \ f\left(x\right)=x^{2}\ \ ;\ \ g\left(x\right)=x^{3}$$
$$2\ \ f\left(x\right)=x^{2}-5\ \ ;\ \ g\left(x\right)=\frac{1}{x}$$
$$3\ \ f\left(x\right)=\sqrt{x}\ \ ;\ \ g\left(x\right)=x^{2}$$
$$4\ \ f\left(x\right)=\sqrt{x-8}\ \ ;\ \ g\left(x\right)=x^{3}$$

6-4/ Exercice 4

Déterminer les variations de la fonction f dans chacune des cas suivantes :

$1\ \ f\left(x\right)=x^{2}+\sqrt{2}$ $2\ \ f\left(x\right)=x^{3}-5$ $3\ \ f\left(x\right)=\frac{8}{x}$ $4\ \ f\left(x\right)=-3\sqrt{x-3}+5$	$5\ \ f\left(x\right)=x^{2}-6$ $6\ \ f\left(x\right)=\frac{-\sqrt{3}+1}{x}$ $7\ \ f\left(x\right)=\sqrt{x-5}+6$ $8\ \ f\left(x\right)=-6x^{3}+9$

6-5/ Exercice 5

En utilisant la propriété de la monotonie de la composée de deux fonction, étudier la monotonie de la fonction f sur les intervalle I et J dans chacune des cas suivantes :

$$1\ \ f\left(x\right)=\sqrt{x^{2}+1}\ \ ;\ \ I=\mathbb{R}^{+}\ \ ;\ \ J=\mathbb{R}^{-}$$
$$2\ \ f\left(x\right)=\frac{1}{x^{2}+3}\ \ ;\ \ I=\mathbb{R}^{+}\ \ ;\ \ J=\mathbb{R}^{-}$$
$$3\ \ f\left(x\right)=\sin^{2}\left(x\right)\ \ ;\ \ I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\ \ ;\ \ J=\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$$

6-6/ Exercice 6

1. Représenter graphiquement la fonction f dans chacune des cas suivantes :

$1\ \ f\left(x\right)=\sqrt{x-2}$ $2\ \ f\left(x\right)=\sqrt{x+3}$ $3\ \ f\left(x\right)=\frac{-4}{x^{3}}$	$4\ \ f\left(x\right)=\frac{2}{x^{3}}$ $5\ \ f\left(x\right)=\sqrt{x-1}+2$ $6\ \ f\left(x\right)=\frac{1}{x^{3}}+1$

Soient f et g deux fonctions telles que $f\left(x\right)=\frac{4}{x^{3}}$ et $g\left(x\right)=\sqrt{x+2}$.

2. Représenter graphiquement f et g.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f\left(x\right)=g\left(x\right)$.
4. Résoudre graphiquement l'équation $f\left(x\right)<g\left(x\right)$.
5. Vérifier algébriquement les solutions précédentes.