

## I- Exercice 1 (4 pts)

1. Déterminer les propositions parmi les énoncés mathématiques suivants, justifier votre réponse :

a- Soit  $n$  un entier naturel

b- Il existe un réel  $x$  tel que  $x^2 = 2$

c-  $6 < \frac{25}{4}$

d- Si  $n$  est un entier naturel pair, alors  $n^2$  est pair.

On considère la proposition suivante :

$$T : (\forall x \in \mathbb{R}) [x^2 = 49 \Rightarrow x = 7]$$

2. Donner la négation de la proposition  $T$ .
3. En déduire que la proposition  $T$  est fausse.
4. Recopier et compléter le tableau suivant :

Proposition	Transformer en phrase française	Sa valeur de vérité	Sa négation
$(\forall x \in \mathbb{R}) [x > -3 \Rightarrow \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}]$			

## II- Exercice 2 (3 pts)

1. Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \sqrt{4 + x^2} \neq 2 + x$ .

2. Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{N}^*) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

## III- Exercice 3 (7 pts)

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  telles que  $f(x) = -x^2 + 2x + 1$  et  $g(x) = \sqrt{x-1}$ .

1. Vérifier que  $D_f = \mathbb{R}$  et  $D_g = [1; +\infty[$ .
2. Montrer que  $f$  est majorée par 2.
3. Étudier la monotonie de  $f$  et  $g$  puis tracer leurs tableaux de variations.
4. Déterminer l'intersection de  $(\mathcal{C}_f)$  avec l'axe des abscisses.

5. Déterminer l'intersection de  $(\mathcal{C}_g)$  avec l'axe des abscisses.
6. Construire  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$  dans le même repère.
7. Déterminer graphiquement le nombre de solutions d'équation  $x^2 = 2x + 1 - \sqrt{x-1}$ .

On considère la fonction  $h$  tel que  $(\forall x \in D_h) : h(x) = f \circ g(x)$ .

8. Déterminer  $D_h$ .
9. Vérifier que  $(\forall x \in D_h) : h(x) = 2\sqrt{x-1} - x + 2$ .
10. Déterminer la monotonie de  $h$  sur  $D_h$ .

#### IV- Exercice 4 (6 pts)

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par  $f(x) = \frac{1}{4}x^3$  et  $g(x) = \sqrt{x+2}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  et  $g$ .
2. Vérifier que  $f(2) = g(2)$ , puis interpréter le résultat graphiquement .
3. Dresser le tableau de variations de  $f$  et  $g$ .
4. Construire les courbes  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$  dans un repère orthonormé  $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ .
5. Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in (D_f \cap D_g)$ .
6. Déterminer graphiquement  $g([-1; +\infty[)$ .
7. Déterminer l'ensemble de définition  $D_{g \circ f}$
8. Calculer  $(g \circ f)(x)$  pour tout  $x \in D_{g \circ f}$ .