AlloSchool

Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 6 (Trigonométrie)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Formules de transformations de $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$ et $\tan(a \pm b)$

1-1/ Transformations de $\sin(a \pm b)$ et $\cos(a \pm b)$

1-2/ Transformations de $\tan(a \pm b)$

II- Formules de transformations des sommes à des produit et les produits à des sommes

2-1/ Transformations des sommes à des produits

2-2/ Transformations des produits à des sommes

III- Autres formules de transformations

3-1/ Transformation de $a\cos x + b\sin x$

3-2/ Transformations de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $t = \tan\frac{x}{2}$

IV- Équations trigonométriques (Rappel)

4-1/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R}/\cos x = a$

4-2/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R}/\sin x = a$

4-3/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi/\mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}/\tan x = a$

4-4/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R}/a\cos x + b\cos x = c$

V- Cercle trigonométrique

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

I- Formules de transformations de $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$ et $\tan(a \pm b)$

1-1/ Transformations de $\sin(a \pm b)$ et $\cos(a \pm b)$

Formules

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\
\sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)
\end{aligned}$$

Conséquences

Si $a = b$ on obtient : $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ et $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

D'après $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ et $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$

Exemple

1-2/ Transformations de $\tan(a \pm b)$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b} \\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b} \\
\tan(2a) &= \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}
\end{aligned}$$

II- Formules de transformations des sommes à des produit et les produits à des sommes

2-1/ Transformations des sommes à des produits

$$\begin{aligned}
\cos a + \cos b &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\cos a - \cos b &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\sin a + \sin b &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
\sin a - \sin b &= -2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)
\end{aligned}$$

2-2/ Transformations des produits à des sommes

$$\begin{aligned}
\cos a \times \cos b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \\
\sin a \times \sin b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right] \\
\sin a \times \cos b &= \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]
\end{aligned}$$

III- Autres formules de transformations

3-1/ Transformation de $a\cos x + b\sin x$

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$.

On a :

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2} \times \sin(x+\alpha)$ avec $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2} \times \cos(x-\alpha)$ avec $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3-2/ Transformations de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $t = \tan\frac{x}{2}$

On pose $t = \tan\frac{x}{2}$ avec $x \neq \pi + 2k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x = \frac{2t}{1-t^2}$$

IV- Équations trigonométriques (Rappel)

4-1/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R}/\cos x = a$

a est un nombre réel donné l'ensemble de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}/\cos x = a$.

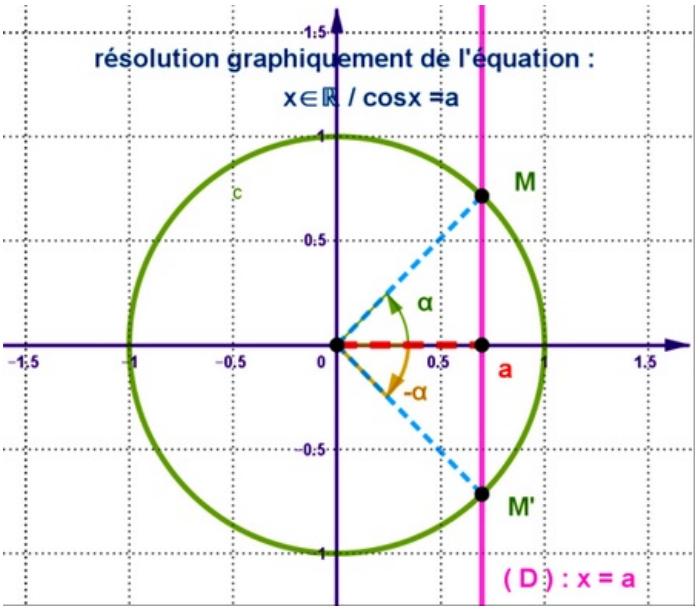
Si $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors $S = \emptyset$ (pas de solution)

Si $a \in [-1, 1]$, on cherche α tel que $a = \cos\alpha$, d'où :

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} ; \ k \in \mathbb{Z}$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation est :

$$S = \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$$



Cas particuliers

Si $a = 1$, on a $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Si $a = -1$, on a $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Si $a = 0$, on a $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exemple

4-2/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R}/\sin x = a$

a est un nombre réel donné l'ensemble de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}/\sin x = a$.

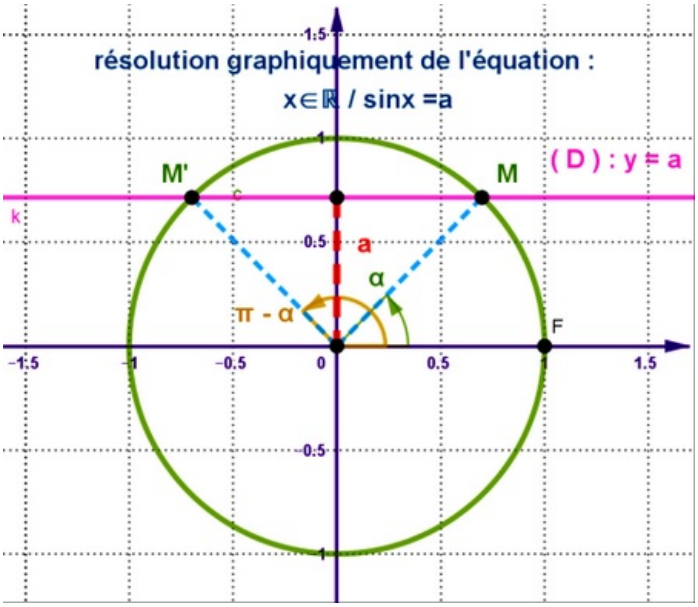
Si $a \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, alors $S=\emptyset$ (pas de solution)

Si $a \in [-1,1]$, on cherche α tel que $a=\sin\alpha$, d'où :

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases};\ k \in \mathbb{Z}$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation est :

$$S = \{\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2\mathrm{k}\pi/\mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}.$$



Cas particuliers

Si $a=1$, on a $S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi/\mathrm{k}\in\mathbb{Z}\right\}$

Si $a=-1$, on a $S=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi/\mathrm{k}\in\mathbb{Z}\right\}$

Si $a=0$, on a $S=\{k\pi/\mathrm{k}\in\mathbb{Z}\}$

Exemple

4-3/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/\mathrm{k}\in\mathbb{Z}\right\}/\tan x = a$

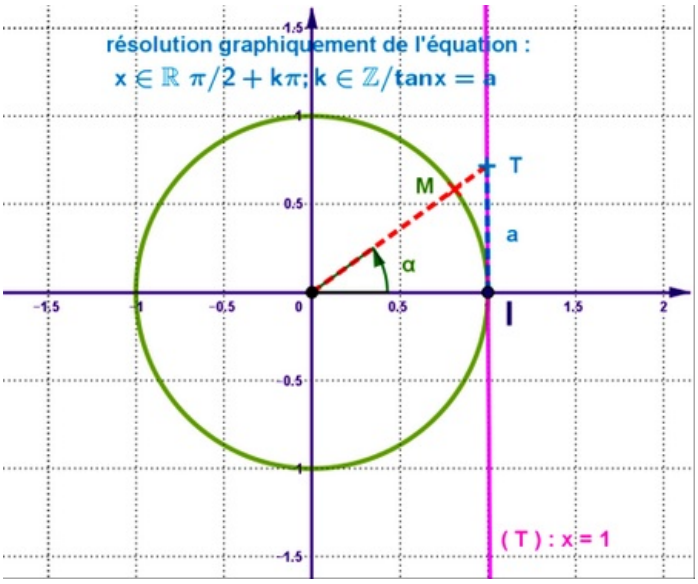
a est un nombre réel donné l'ensemble de solutions de l'équation
$x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/\mathrm{k}\in\mathbb{Z}\right\}/\tan x = a$.

On cherche α tel que $a=\tan\alpha$, d'où :

$$\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation est :

$$S = \{\alpha + k\pi/\mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}.$$



4-4/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R}/a\cos x + b\cos x = c$

Pour résoudre l'équation suivante $(E) : x \in \mathbb{R}/a\cos x + b\cos x = c$, on suit les étapes suivantes :

Étape 1

On écrit l'équation sous la forme suivante :

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right] = c$$

Puis on l'écrit :

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\left[\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x\right] = c$$

$$ou$$

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}\left[\sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x\right] = c$$

Puis on l'écrit :

$$\cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$ou$$

$$\sin(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Étape 2

Au lieu de résoudre l'équation $(E) : x \in \mathbb{R}/a\cos x + b\cos x = c$, on résout l'équation :

$$\cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$ou$$

$$\sin(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Étape 3

Ensemble de solution de l'équation est lié à la valeur de $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \notin [-1,1]$, l'équation n'a pas de solution : $S = \emptyset$

Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1]$, on cherche β tel que $\cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (ou $\sin\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

D'où :

$$(E) \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \cos\beta$$

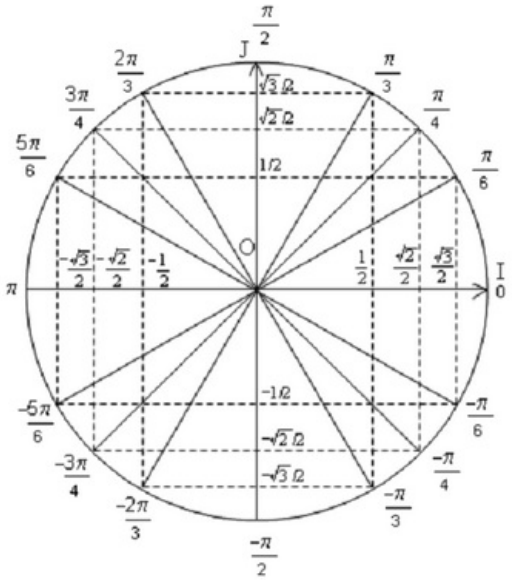
ou

$$(E) \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \sin\beta$$

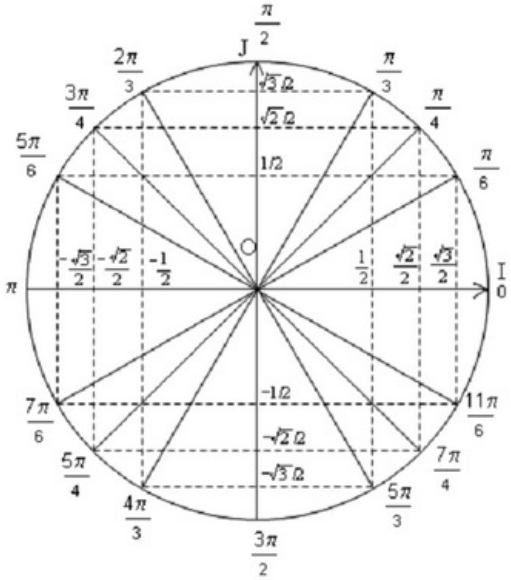
Exemple

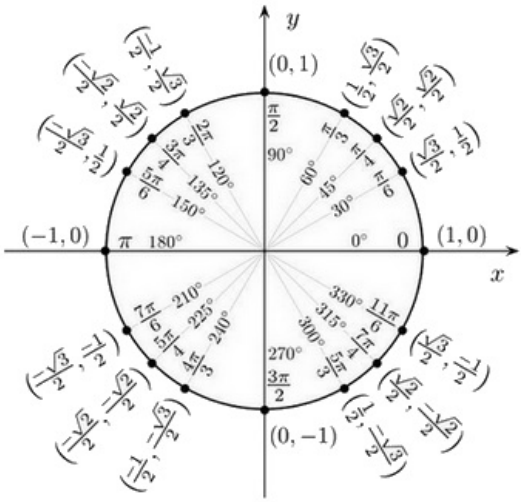
V- Cercle trigonométrique

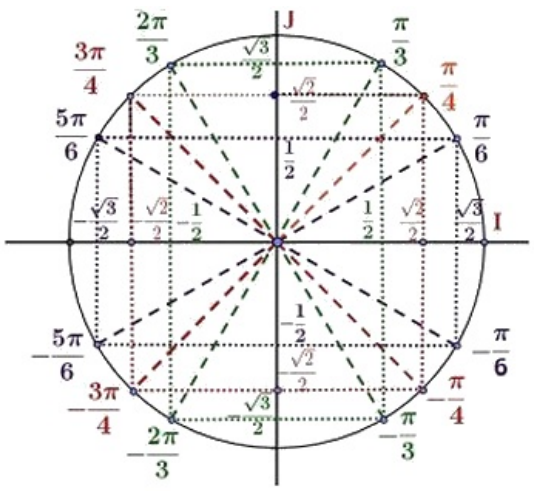
$[-\pi;\ \pi]$



$[0;2\pi]$







VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Transformer en produit les expressions suivantes :

$$A(x) = \cos x + \cos 3x$$
$$B(x) = \cos 2x + \cos 4x$$

2. En déduire que :

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 4.\cos x.\cos\left(\tfrac{x}{2}\right).\cos\left(\tfrac{5x}{2}\right)$$

3. Montrer que :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 4.\cos x.\cos\left(\tfrac{x}{2}\right).\sin\left(\tfrac{5x}{2}\right)$$

6-2/ Exercice 2

On considère l'expression suivante : $A(x) = 4\sqrt{3}\cos^4 x + \sqrt{3}\sin^2(2x) - 2\sin(2x)\ ;\ (x \in \mathbb{R})$

1. Montrer que : $4\cos^4 x = 4\cos^2 x - \sin^2(2x)$
2. En déduire que : $A(x) = 4\cos x.\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)$
3. Montrer que : $A(x) = 8\cos x.\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $A(x) = 0$

6-3/ Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E_1)\ :\ \cos x + \sqrt{3}\sin x = -1$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(E_2)\ :\ \sqrt{3}\cos(2x) - \sin(2x) = -\sqrt{2}$
3. Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation : $\sqrt{3}\cos x - \sin x \leq -\sqrt{2}$

6-4/ Exercice 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $A(x) = \sqrt{3}\sin(4x) - 8\sin^2 x.\cos^2 x$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\cos x - 1 = 0$
2. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ 1 - \cos(4x) = 8\sin^2 x.\cos^2 x$
3. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ A(x) = 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $A(x) = 0$
5. Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ l'inéquation : $A(x) \leq 0$