AlloSchool

Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 6 (Trigonométrie)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Formules de transformations de $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$ et $\tan(a \pm b)$

1-1/ Transformations de $\sin(a \pm b)$ et $\cos(a \pm b)$

1-2/ Transformations de $\tan(a \pm b)$

II- Formules de transformations des sommes à des produit et les produits à des sommes

2-1/ Transformations des sommes à des produits

2-2/ Transformations des produits à des sommes

III- Autres formules de transformations

3-1/ Transformation de $a\cos x + b\sin x$

3-2/ Transformations de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $t = \tan\frac{x}{2}$

IV- Équations trigonométriques (Rappel)

4-1/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$

4-2/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$

4-3/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\} / \tan x = a$

4-4/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / a\cos x + b\cos x = c$

V- Cercle trigonométrique

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

I- Formules de transformations de $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$ et $\tan(a \pm b)$

1-1/ Transformations de $\sin(a \pm b)$ et $\cos(a \pm b)$

Formules

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)\end{aligned}$$

Conséquences

Si $a = b$ on obtient : $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ et $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

D'après $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ et $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$

Exemple

1-2/ Transformations de $\tan(a \pm b)$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a :

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}\\ \tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}\\ \tan(2a) &= \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}\end{aligned}$$

II- Formules de transformations des sommes à des produit et les produits à des sommes

2-1/ Transformations des sommes à des produits

$$\begin{aligned}\cos a + \cos b &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ \cos a - \cos b &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ \sin a + \sin b &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\\ \sin a - \sin b &= -2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\end{aligned}$$

2-2/ Transformations des produits à des sommes

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \times \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \times \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

III- Autres formules de transformations

3-1/ Transformation de $a\cos x + b\sin x$

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$.

On a :

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2} \times \sin(x+\alpha)$ avec $\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2} \times \cos(x-\alpha)$ avec $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3-2/ Transformations de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $t = \tan\frac{x}{2}$

On pose $t = \tan\frac{x}{2}$ avec $x \neq \pi + 2k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x = \frac{2t}{1-t^2}$$

IV- Équations trigonométriques (Rappel)

4-1/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R}/\ \cos x = a$

a est un nombre réel donné l'ensemble de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}/\ \cos x = a$.

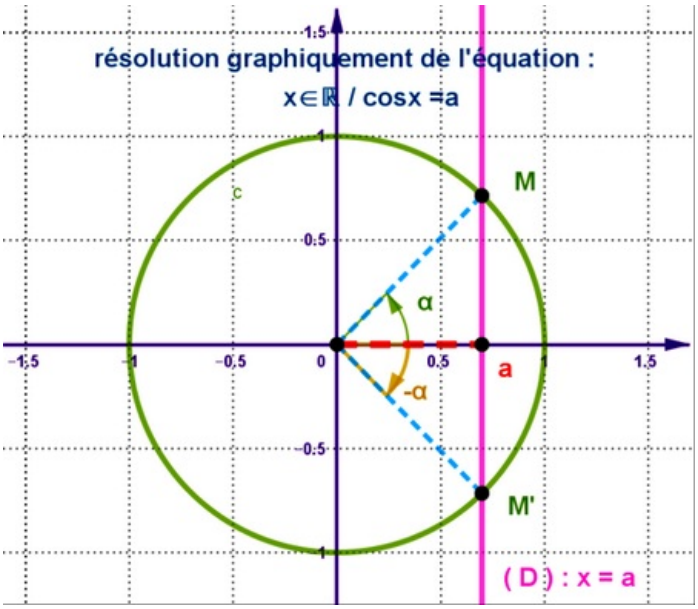
Si $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors $S = \emptyset$ (pas de solution)

Si $a \in [-1, 1]$, on cherche α tel que $a = \cos\alpha$, d'où :

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} ;\ k \in \mathbb{Z}$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation est :

$$S = \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$$



Cas particuliers

Si $a = 1$, on a $S = \{2k\pi / \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$

Si $a = -1$, on a $S = \{\pi + 2k\pi / \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$

Si $a = 0$, on a $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

Exemple

4-2/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$

a est un nombre réel donné l'ensemble de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$.

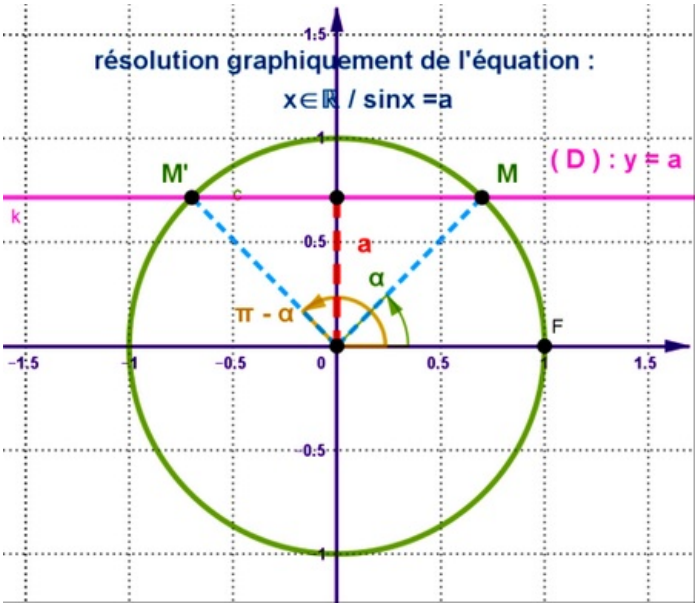
Si $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors $S = \emptyset$ (pas de solution)

Si $a \in [-1, 1]$, on cherche α tel que $a = \sin \alpha$, d'où :

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} ; \ k \in \mathbb{Z}$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation est :

$$S = \{\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2\mathrm{k}\pi / \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}.$$



Cas particuliers

Si $a = 1$, on a $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

Si $a = -1$, on a $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

Si $a = 0$, on a $S = \{k\pi / \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$

Exemple

4-3/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\} / \tan x = a$

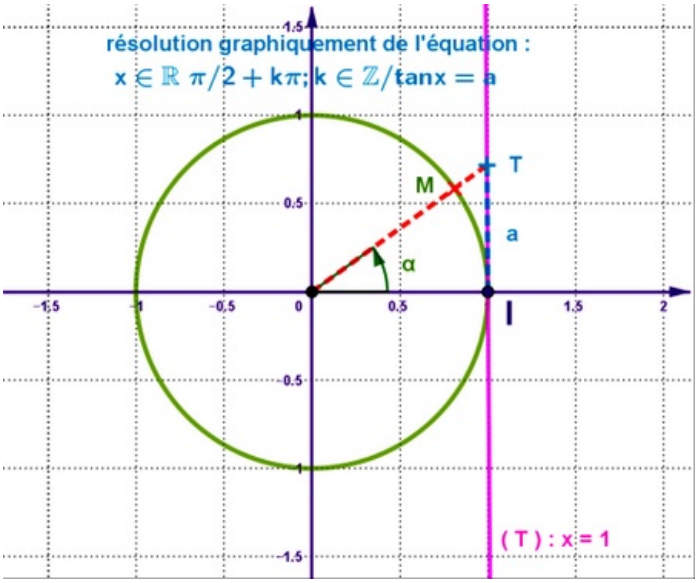
a est un nombre réel donné l'ensemble de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\} / \tan x = a$.

On cherche α tel que $a = \tan \alpha$, d'où :

$$\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation est :

$$S = \{\alpha + k\pi / \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}.$$



4-4/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / a \cos x + b \cos x = c$

Pour résoudre l'équation suivante (E) : $x \in \mathbb{R} / a \cos x + b \cos x = c$, on suit les étapes suivantes :

Étape 1

On écrit l'équation sous la forme suivante :

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x\right] = c$$

Puis on l'écrit :

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \left[\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x\right] = c$$

$$ou$$

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \left[\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x\right] = c$$

Puis on l'écrit :

$$\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$ou$$
$$\sin(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Étape 2

Au lieu de résoudre l'équation $(E): x\in\mathbb{R}/a\cos x+b\cos x=c$, on résout l'équation :

$$\cos(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$ou$$
$$\sin(x-\alpha)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Étape 3

Ensemble de solution de l'équation est lié à la valeur de $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\notin[-1,1]$, l'équation n'a pas de solution : $S=\emptyset$

Si $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\in[-1,1]$, on cherche β tel que $\cos\beta=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (ou $\sin\beta=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

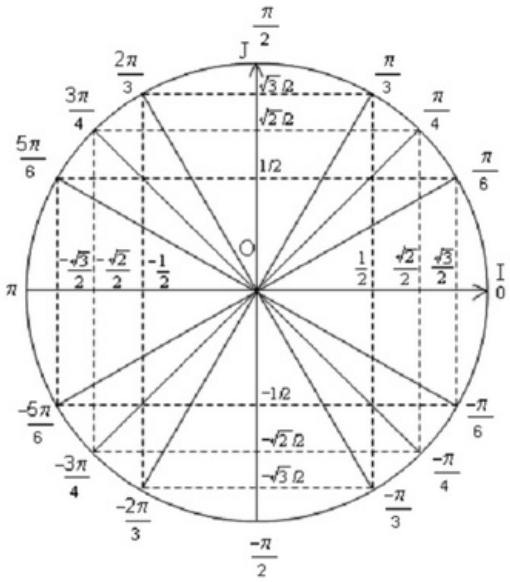
D'où :

$$(E)\Leftrightarrow\cos(x-\alpha)=\cos\beta$$
$$ou$$
$$(E)\Leftrightarrow\sin(x+\alpha)=\sin\beta$$

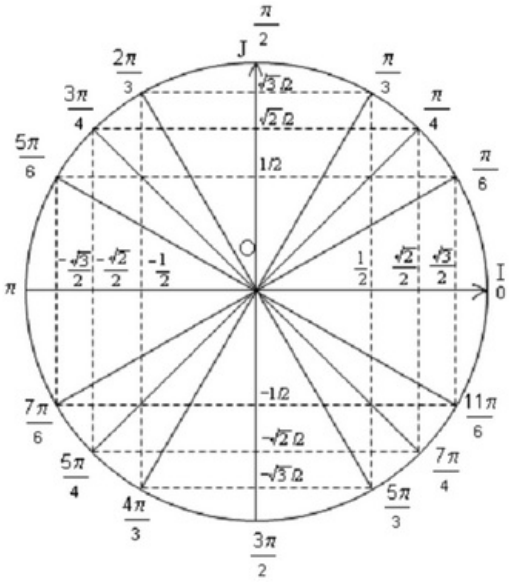
Exemple

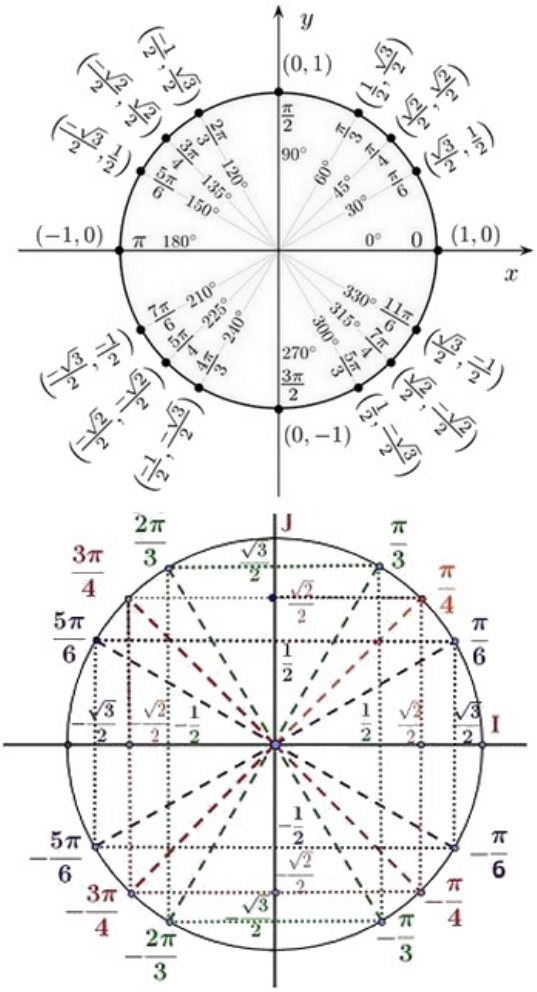
V- Cercle trigonométrique

$[-\pi;\pi]$



$[0;2\pi]$





VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Transformer en produit les expressions suivantes :

$$A(x) = \cos x + \cos 3x$$
$$B(x) = \cos 2x + \cos 4x$$

2. En déduire que :

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 4.\cos x.\cos\left(\frac{x}{2}\right).\cos\left(\frac{5x}{2}\right)$$

3. Montrer que :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 4.\cos x.\cos\left(\frac{x}{2}\right).\sin\left(\frac{5x}{2}\right)$$

6-2/ Exercice 2

On considère l'expression suivante :

$A(x) = 4\sqrt{3}\cos^4 x + \sqrt{3}\sin^2(2x) - 2\sin(2x)\ ;\ \ (x \in \mathbb{R})$

1. Montrer que : $4\cos^4 x = 4\cos^2 x - \sin^2(2x)$
2. En déduire que : $A(x) = 4\cos x.\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)$
3. Montrer que : $A(x) = 8\cos x.\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $A\left(x\right)=0$

6-3/ Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\left(E_1\right)\ :\ \cos x+\sqrt{3}\sin x=-1$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\left(E_2\right)\ :\ \sqrt{3}\cos\left(2x\right)-\sin\left(2x\right)=-\sqrt{2}$
3. Résoudre dans $\left[-\pi;\pi\right]$ l'inéquation : $\sqrt{3}\cos x-\sin x\leq-\sqrt{2}$

6-4/ Exercice 4

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose : $A\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\left(4x\right)-8\sin^2 x.\cos^2 x$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\cos x-1=0$
2. Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\ :\ 1-\cos\left(4x\right)=8\sin^2 x.\cos^2 x$
3. En déduire que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\ :\ A\left(x\right)=2\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)-1$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $A\left(x\right)=0$
5. Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ l'inéquation : $A\left(x\right)\leq0$