

SommaireI- Formules de transformations de $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$ et $\tan(a \pm b)$ 1-1/ Transformations de $\sin(a \pm b)$ et $\cos(a \pm b)$ 1-2/ Transformations de $\tan(a \pm b)$

II- Formules de transformations des sommes à des produit et les produits à des sommes

2-1/ Transformations des sommes à des produits

2-2/ Transformations des produits à des sommes

III- Autres formules de transformations

3-1/ Transformation de $a \cos x + b \sin x$ 3-2/ Transformations de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$

IV- Équations trigonométriques (Rappel)

4-1/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$ 4-2/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$ 4-3/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} / \tan x = a$ 4-4/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / a \cos x + b \sin x = c$

V- Cercle trigonométrique

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

I- Formules de transformations de $\sin(a \pm b)$, $\cos(a \pm b)$ et $\tan(a \pm b)$

1-1/ Transformations de $\sin(a \pm b)$ et $\cos(a \pm b)$

Formules

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$$

Conséquences

Si $a = b$ on obtient : $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ et $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

D'après $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \text{ et } \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

Exemple

1-2/ Transformations de $\tan(a \pm b)$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a :

$$\begin{aligned} \tan(a + b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b} \\ \tan(a - b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b} \\ \tan(2a) &= \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \end{aligned}$$

II- Formules de transformations des sommes à des produit et les produits à des sommes

2-1/ Transformations des sommes à des produits

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = -2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

2-2/ Transformations des produits à des sommes

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin a \times \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$$

$$\sin a \times \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

III- Autres formules de transformations

3-1/ Transformation de $a \cos x + b \sin x$

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$.

On a :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \times \sin(x + \alpha) \text{ avec } \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \times \cos(x - \alpha) \text{ avec } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3-2/ Transformations de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$

On pose $t = \tan \frac{x}{2}$ avec $x \neq \pi + 2k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

On a :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} ; \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

IV- Équations trigonométriques (Rappel)

4-1/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$

a est un nombre réel donné l'ensemble de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$.

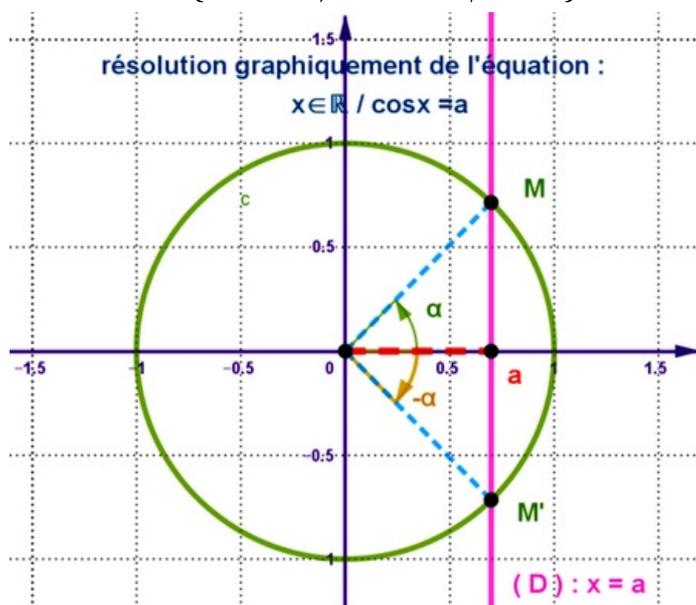
Si $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors $S = \emptyset$ (pas de solution)

Si $a \in [-1, 1]$, on cherche α tel que $a = \cos \alpha$, d'où :

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation est :

$$S = \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$$



Cas particuliers

Si $a = 1$, on a $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Si $a = -1$, on a $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Si $a = 0$, on a $S = \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple

4-2/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$

a est un nombre réel donné l'ensemble de solutions de l'équation $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$.

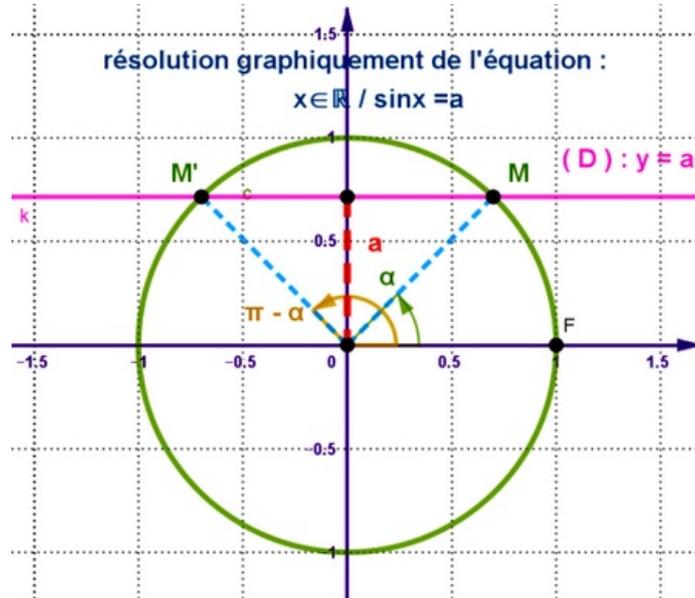
Si $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, alors $S = \emptyset$ (pas de solution)

Si $a \in [-1, 1]$, on cherche α tel que $a = \sin \alpha$, d'où :

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation est :

$$S = \{\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$$



Cas particuliers

Si $a = 1$, on a $S = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Si $a = -1$, on a $S = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Si $a = 0$, on a $S = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple

4-3/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\} / \tan x = a$

a est un nombre réel donné l'ensemble de solutions de l'équation

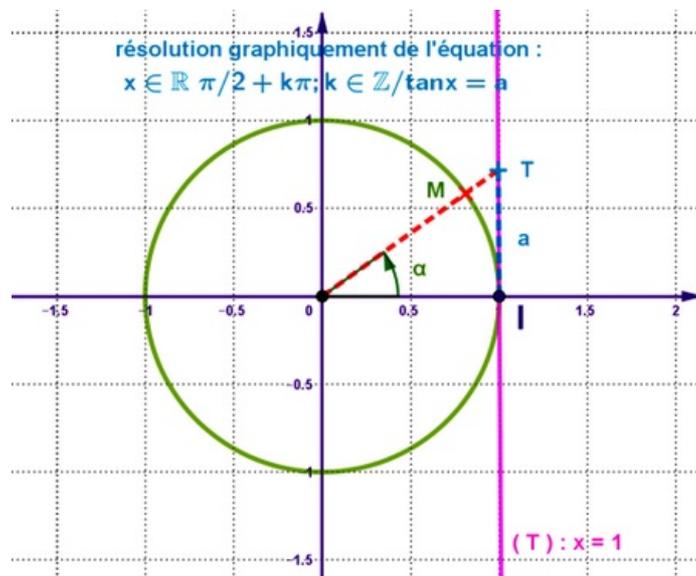
$$x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\} / \tan x = a.$$

On cherche α tel que $a = \tan \alpha$, d'où :

$$\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation est :

$$S = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$$



4-4/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / a \cos x + b \sin x = c$

Pour résoudre l'équation suivante (E) : $x \in \mathbb{R} / a \cos x + b \sin x = c$, on suit les étapes suivantes :

Étape 1

On écrit l'équation sous la forme suivante :

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right] = c$$

Puis on l'écrit :

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} [\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x] = c$$

ou

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} [\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x] = c$$

Puis on l'écrit :

$$\cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ou

$$\sin(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Étape 2

Au lieu de résoudre l'équation (E) : $x \in \mathbb{R} / a \cos x + b \sin x = c$, on résout l'équation :

$$\cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ou

$$\sin(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Étape 3

Ensemble de solution de l'équation est lié à la valeur de $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Si $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \notin [-1, 1]$, l'équation n'a pas de solution : $S = \emptyset$

Si $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in [-1, 1]$, on cherche β tel que $\cos \beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (ou $\sin \beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

D'où :

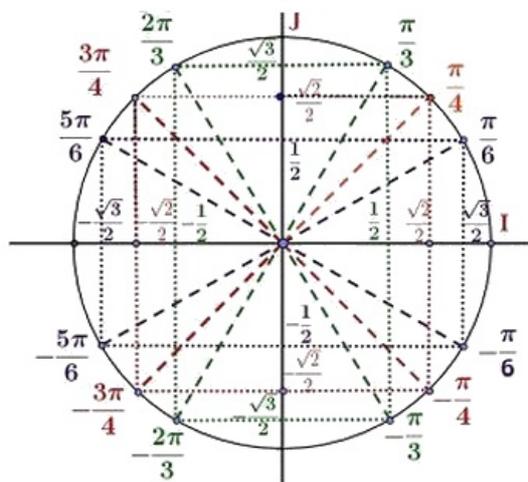
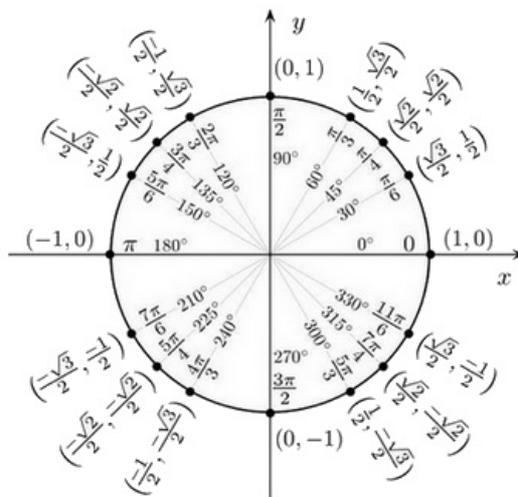
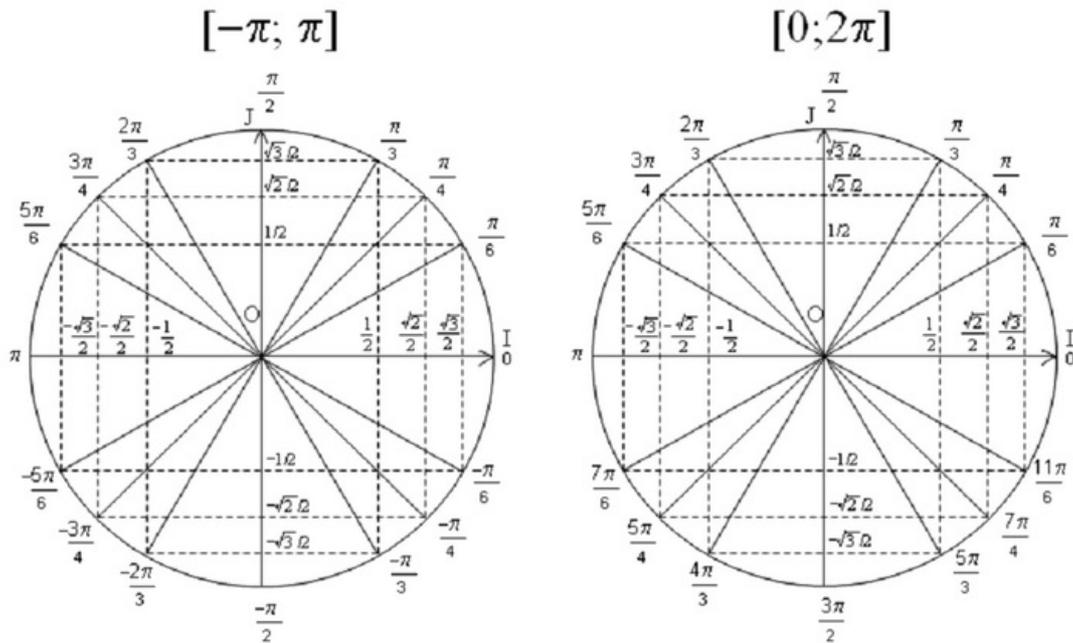
$$(E) \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \cos \beta$$

ou

$$(E) \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \sin \beta$$

Exemple

V- Cercle trigonométrique



VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Transformer en produit les expressions suivantes :

$$A(x) = \cos x + \cos 3x$$

$$B(x) = \cos 2x + \cos 4x$$

2. En déduire que :

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 4 \cdot \cos x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x}{2}\right)$$

3. Montrer que :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 4 \cdot \cos x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{5x}{2}\right)$$

6-2/ Exercice 2

On considère l'expression suivante : $A(x) = 4\sqrt{3}\cos^4 x + \sqrt{3}\sin^2(2x) - 2\sin(2x)$; ($x \in \mathbb{R}$)

1. Montrer que : $4\cos^4 x = 4\cos^2 x - \sin^2(2x)$
2. En déduire que : $A(x) = 4\cos x \cdot (\sqrt{3}\cos x - \sin x)$
3. Montrer que : $A(x) = 8\cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
4. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $A(x) = 0$

6-3/ Exercice 3

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $(E_1) : \cos x + \sqrt{3}\sin x = -1$
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $(E_2) : \sqrt{3}\cos(2x) - \sin(2x) = -\sqrt{2}$
3. Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation : $\sqrt{3}\cos x - \sin x \leq -\sqrt{2}$

6-4/ Exercice 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $A(x) = \sqrt{3}\sin(4x) - 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $2\cos x - 1 = 0$
2. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : 1 - \cos(4x) = 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x$
3. En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : A(x) = 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$
4. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $A(x) = 0$
5. Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$ l'inéquation : $A(x) \leq 0$