Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM – Eco

Séance 1 (Notions de logique)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Définitions

1-1/ Proposition

tout énoncé mathématique (texte mathématique) qui a un sens pouvant être vrai ou faux (mais pas les deux en même temps) est une proposition.

On note souvent une proposition par les lettres P, Q ou R ..etc...

Exemple

1-2/ Fonction propositionnelle

On appelle une fonction propositionnelle, tout énoncé mathématique contenant une variable x ou plusieurs variables (x,y, z,...), et qui appartiennent à des ensembles déterminés.

On note P(x) ou P(x,y;z,...).

1-3/ Quantificateurs

Quantificateur universel

L'expression suivante « pour tout x de E la proposition Q(x) est vraie », on la note : «$\forall x \in E\ ,\ Q(x)$» .

Le symbole $\forall$ s'appelle quantificateur universel et il se lit :

- pour tout
- quel que soit

Exemple :

- «$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \sqrt{x^2} = |x|$»

Quantificateur existentiel

L'expression suivante « il existe un x de E tel que la proposition Q(x) est vraie », on la note : «$\exists x \in E\ ,\ Q(x)$» .

Le symbole $\exists$ s'appelle quantificateur existentiel et il se lit :

- il existe

Exemple :

- «$\exists x \in \mathbb{R}\ ,\ x + 2 \geq 1$»

Symbole $\exists!$

L'expression suivante « il existe un unique x de E tel que la proposition Q(x) est vraie », on la note : «$\exists! x \in E\ ,\ Q(x)$» .

Exemple :

- «$\exists! x \in \mathbb{R}\ ,\ x + 2 = 1$»

Remarques

- L'ordre des quantificateurs de même type (universel ou bien existentiel) ne change pas le sens de la fonction propositionnelle.

- L'ordre des quantificateurs de types différents (universel et existentiel) change le sens de la fonction propositionnelle.

- La négation du quantificateur $\forall$ est le quantificateur $\exists$.

- La négation du quantificateur $\exists$ est le quantificateur $\forall$.

- Les écritures suivantes sont équivalentes :

$$\forall x \in E, \forall y \in E \Leftrightarrow \forall x, y \in E \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E \times E$$

- Les écritures suivantes sont équivalentes :

$$\exists x \in E, \exists y \in E \Leftrightarrow \exists x, y \in E \Leftrightarrow \exists (x, y) \in E \times E$$

II- Opérations sur les propositions

2-1/ La négation d'une proposition

La négation d'une proposition P est la proposition qu'on note $\overline{P}$ ou non P tel que les valeurs de vérité de P et $\overline{P}$ sont opposées.

p	$\bar{p} = \rceil p$
1	0
0	1

2-2/ La conjonction de deux propositions – La disjonction de deux propositions

La conjonction de deux propositions

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition notée $P \wedge Q$ ou bien $P\ et\ Q$.

Elle est vraie seulement dans le cas où P et Q sont toutes les deux vraies.

p	q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La disjonction de deux propositions

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition notée $P \vee Q$ ou bien $P\ ou\ Q$.

Elle est fausse seulement dans le cas où P et Q sont toutes les deux fausses.

p	q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Propriétés

La conjonction et la disjonction sont commutatives : $P \wedge Q = Q \wedge P$; $P \vee Q = Q \vee P$

La conjonction et la disjonction sont associatives :
$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$; $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$

La négation de la conjonction : $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$

La négation de la disjonction : $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$

La conjonction est distributive sur la disjonction : $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

La disjonction est distributive sur la conjonction : $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

2-3/ L'implication de deux propositions

Définition

L'implication de deux propositions P puis Q est la proposition $\overline{P} \vee Q$; qu'on note par $P \Rightarrow Q$.

On lit P implique Q.

La proposition P s'appelle les données (ou hypothèses) de l'implication.

La proposition Q s'appelle la conclusion de l'implication.

p	q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Propriétés

L'implication est transitive : $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

La négation de l'implication : $\overline{(P \Rightarrow Q)} = P \wedge \overline{Q}$

La contraposée : $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \left(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}\right)$

2-4/ L'équivalence de deux propositions

Définition

L'équivalence de deux propositions P et Q est la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$; qu'on note par $P \Leftrightarrow Q$.

On lit P est équivalente à Q ou bien P si et seulement si Q.

p	q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Propriétés

L'équivalence est transitive : $[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$

$(P \Leftrightarrow Q) = (Q \Leftrightarrow P)$

$(P \Leftrightarrow Q) = \left(\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q}\right)$

$\overline{(P \Leftrightarrow Q)} = \overline{(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)} = \left(P \wedge \overline{Q}\right) \vee \left(\overline{P} \wedge Q\right)$

2-5/ Les lois logiques

Définition

Une loi logique est une proposition qui est vraie quel que soit la vérité des propositions qui la constitue.

III- Types de raisonnements

3-1/ Raisonnement par contre exemple

Pour prouver que la propriétés suivante est fausse $(\forall x \in E, P(x))$, il suffit de prouver que $\left(\exists x \in E, \overline{P(x)}\right)$ est vraie (c.à.d. de trouver un élément x de E qui ne vérifie pas P(x), c'est ce qu'on appelle un contre exemple).

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par contre exemple.

Exemple

3-2/ Raisonnement par des équivalences successives

Pour démontrer que l'équivalence suivant $P \Leftrightarrow Q$ est vrai, on démontrer que : $P \Leftrightarrow Q_1$ et $Q_1 \Leftrightarrow Q_2$ et $Q_2 \Leftrightarrow Q_3$ et ... et $Q_n \Leftrightarrow Q$.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par des équivalences successives.

3-3/ Raisonnement déductif

Si on a l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et on a dans un exercice comme donnée la proposition P donc on déduit que la proposition Q est vraie.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par déduction.

3-4/ Raisonnement par la contraposée

Pour démontrer l'implication suivante $P \Rightarrow Q$, il suffit de démontrer l'implication suivante $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par la contraposée.

3-5/ Raisonnement par la disjonction des cas

Lorsqu'on utilise plusieurs cas dans une démonstration, le raisonnement utilisé s'appelle raisonnement par disjonction des cas.

3-6/ Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition Q (conclusion ou résultat), et on a parmi les données la proposition P.

On suppose que $\overline{Q}$ et au cour de la démonstration on trouve une contradiction

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par l'absurde.

3-7/ Raisonnement par la récurrence

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une relation portant sur les entiers naturels n tel que $n \geq n_0$.

Pour démontrer que la relation $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, on utilise les étapes suivantes :

- On vérifie que $P(n)$ est vraie pour $n = n_0$ (c.à.d. $P(n_0)$ est vraie).
- On suppose que $P(n)$ est vraie pour n avec $n \geq n_0$, la supposition s'appelle hypothèse de récurrence
- On démontre que la relation $P(n)$ est vraie pour $n+1$ (c.à.d. $P(n+1)$ est vraie)

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par récurrence.

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

1. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes puis déterminer leurs négations :

$$1\ p_1\ :\ "\ \sqrt{2} \in \mathbb{N}\ "$$
$$2\ p_2\ :\ "\ \sqrt{(-2)^2} = -2^2\ "$$
$$3\ p_3\ :\ "\ \pi = \frac{22}{7}\ "$$
$$4\ p_4\ :\ "\ \mathbb{N} \subset \mathbb{R}\ "$$
$$5\ p_5\ :\ "\ 3\ est\ un\ nombre\ impair\ "$$
$$6\ p_6\ :\ "\ \sqrt{9} = -3\ et\ (-3)^2 = 9\ "$$
$$7\ p_7\ :\ "\ \sqrt{3} + \sqrt{7} > 3\ ou\ \pi \in \mathbb{Q}\ "$$
$$8\ p_8\ :\ "\ \sqrt{12} \neq 3\ et\ \sqrt{4} = 2\ "$$
$$9\ p_9\ :\ "\ \sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{8}\ ou\ \pi \in \mathbb{R}\ "$$

5-2/ Exercice 2

1. Écrire les propositions suivantes en utilisant les quantificateurs :

1 (P_1) : "Pour tout entier naturel n il existe un entier naturel m tel que $n + m = 0$"

2 (P_2) : "Il existe un réel M tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \leq M$"

3 (P_3) : "Tout réel inférieur ou égal à 1 est négatif"

4 (P_4) : "Il n'existe aucun nombre rationnel solution de l'équation $x^2 = 2$"

5 (P_5) : "La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$"

6 (P_6) : "Tout entier naturel est pair ou impair"

7 (P_7) : "L'équation $\sin(x) = x$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$"

8 (P_8) : "Pour tout réel x, il existe un unique entier relatif p tel que $p \leq x < p+1$"

9 (P_9) : "Il existe au moins un élément réel α tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\alpha \leq x$"

5-3/ Exercice 3

1. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes puis déterminer leurs négations :

$$\begin{gathered}
1 \ p_1 \ : \ (\exists x \in \mathbb{N}) \, x^2 = 36 \\
2 \ p_2 \ : \ (\forall x \in \mathbb{R}) \, x^2 \geq x \\
3 \ p_3 \ : \ (\forall n \in \mathbb{N}) \, n(n+1) \, est \ pair \\
4 \ p_4 \ : \ (\forall x \in \mathbb{R}) \, (\exists y \in \mathbb{R}) \, x \leq y \\
5 \ p_5 \ : \ (\exists x \in \mathbb{R}) \, (\forall y \in \mathbb{R}) \, x \leq y \\
6 \ p_6 \ : \ (\forall x \in \mathbb{N}) \, (\exists y \in \mathbb{R}) \, x = y^2 \\
7 \ p_7 \ : \ (\exists x \in \mathbb{N}) \, (\forall y \in \mathbb{R}) \, x = y^2 \\
8 \ p_8 \ : \ \pi = 3,14 \Rightarrow \sqrt{3} \in \mathbb{Q} \\
9 \ p_9 \ : \ (\forall a \in \mathbb{N}) \, a \ premier \Rightarrow a \ impair \\
10 \ p_{10} \ : \ (\forall x \in \mathbb{R}) \, x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \\
11 \ p_{11} \ : \ (\forall x \in \mathbb{R}) \, x^2 = 4 \Rightarrow x = 2
\end{gathered}$$

5-4/ Exercice 4

Soit P la proposition suivante : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ x^2 - 5x + 4 \neq 0$

1. Donner la négation de la proposition P.
2. En déduire que P est fausse.

Soit P la proposition suivante : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ x^2 - x > 0$.

3. Déterminer la vérité de la proposition P.
4. Donner la négation de P.

5-5/ Exercice 5

Raisonnement par le contre-exemple

1. Montrer que la proposition suivante est fausse : "$(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ x^2 \geq x$".
2. Montrer que la proposition suivante est fausse : "$(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ n^2$ est pair".
3. Montrer que la proposition suivante est fausse : "$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ : \ n^2 + n + 1$ est un entier premier".

Raisonnement par l'absurde

5. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ \frac{x^2+1}{x^2-1} \neq 1$.
6. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \ : \ \sqrt{x^2+1} \neq x+1$.
7. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \ : \ \sqrt{x} \neq \frac{x+2}{\sqrt{x+4}}$.

8. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

5-6/ Exercice 6

Raisonnement par les équivalences

1. Soient a et b deux réels. Montrer que $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
2. Montrer que $\forall$ x $\in \mathbb{R}^*$: $x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$.

Raisonnement par la disjonction des cas

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2 + |x - 1| + 1 = 0$.
6. Montrer que $\forall$ n $\in \mathbb{N}$: $n\,(n + 1)$ est un nombre pair.

5-7/ Exercice 7

Raisonnement par la contraposée

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $x \neq y \Rightarrow (x + 1)\,(y - 1) \neq (x - 1)\,(y + 1)$.
2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $y \neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7$.
3. Soient $(x, y) \in]1; +\infty[\times]1; +\infty[$. Montrer que $x \neq y \Rightarrow x^2 - 3x \neq y^2 - 3y$.

Raisonnement par la récurrence

4. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $7^n - 1$ est divisible par 6.
5. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n-1)}{2}$.