

I- Exercice 1 (4 pts)

- Déterminer les propositions parmi les énoncés mathématiques suivants, justifier votre réponse :
 - Soit n un entier naturel
 - Il existe un réel x tel que $x^2 = 2$
 - $6 < \frac{25}{4}$
 - Si n est un entier naturel pair, alors n^2 est pair.

On considère la proposition suivante :

$$T : (\forall x \in \mathbb{R}) [x^2 = 49 \Rightarrow x = 7]$$

- Donner la négation de la proposition T .
- En déduire que la proposition T est fausse.
- Recopier et compléter le tableau suivant :

Proposition	Transformer en phrase française	Sa valeur de vérité	Sa négation
$(\forall x \in \mathbb{R}) [x > -3 \Rightarrow \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}]$			

II- Exercice 2 (3 pts)

- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \sqrt{4 + x^2} \neq 2 + x$.
- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{N}^*) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

III- Exercice 3 (7 pts)

On considère les fonctions f et g telles que $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x-1}$.

- Vérifier que $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = [1; +\infty[$.
- Montrer que f est majorée par 2.
- Étudier la monotonie de f et g puis tracer leurs tableaux de variations.
- Déterminer l'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.

5. Déterminer l'intersection de $(\mathcal{C}_g)$ avec l'axe des abscisses.
6. Construire $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans le même repère.
7. Déterminer graphiquement le nombre de solutions d'équation $x^2 = 2x + 1 - \sqrt{x-1}$.

On considère la fonction h tel que $(\forall x \in D_h) : h(x) = f \circ g(x)$.

8. Déterminer D_h .
9. Vérifier que $(\forall x \in D_h) : h(x) = 2\sqrt{x-1} - x + 2$.
10. Déterminer la monotonie de h sur D_h .

IV- Exercice 4 (6 pts)

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = \frac{1}{4}x^3$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et g .
2. Vérifier que $f(2) = g(2)$, puis interpréter le résultat graphiquement.
3. Dresser le tableau de variations de f et g .
4. Construire les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in (D_f \cap D_g)$.
6. Déterminer graphiquement $g([-1; +\infty[)$.
7. Déterminer l'ensemble de définition $D_{g \circ f}$.
8. Calculer $(g \circ f)(x)$ pour tout $x \in D_{g \circ f}$.