

### Sommaire

I- Formules de transformations de  $\sin(a \pm b)$ ,  $\cos(a \pm b)$  et  $\tan(a \pm b)$

1-1/ Transformations de  $\sin(a \pm b)$  et  $\cos(a \pm b)$

1-2/ Transformations de  $\tan(a \pm b)$

II- Formules de transformations des sommes à des produit et les produits à des sommes

2-1/ Transformations des sommes à des produits

2-2/ Transformations des produits à des sommes

III- Autres formules de transformations

3-1/ Transformation de  $a \cos x + b \sin x$

3-2/ Transformations de  $\sin x$ ,  $\cos x$  et  $\tan x$  en fonction de  $t = \tan \frac{x}{2}$

IV- Équations trigonométriques (Rappel)

4-1/ Équation de la forme  $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$

4-2/ Équation de la forme  $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$

4-3/ Équation de la forme  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} / \tan x = a$

4-4/ Équation de la forme  $x \in \mathbb{R} / a \cos x + b \sin x = c$

V- Cercle trigonométrique

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

---

## I- Formules de transformations de $\sin(a \pm b)$ , $\cos(a \pm b)$ et $\tan(a \pm b)$

### 1-1/ Transformations de $\sin(a \pm b)$ et $\cos(a \pm b)$

#### Formules

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$$

#### Conséquences

Si  $a = b$  on obtient :  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$  et  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

D'après  $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ , on obtient

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \text{ et } \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

#### Exemple

### 1-2/ Transformations de $\tan(a \pm b)$

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tel que  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  et  $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  et  $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

On a :

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

## II- Formules de transformations des sommes à des produit et les produits à des sommes

### 2-1/ Transformations des sommes à des produits

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = -2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

### 2-2/ Transformations des produits à des sommes

$$\begin{aligned}\cos a \times \cos b &= \frac{1}{2} [\cos (a + b) + \cos (a - b)] \\ \sin a \times \sin b &= \frac{1}{2} [\cos (a + b) - \cos (a - b)] \\ \sin a \times \cos b &= \frac{1}{2} [\sin (a + b) + \sin (a - b)]\end{aligned}$$

### III- Autres formules de transformations

#### 3-1/ Transformation de $a \cos x + b \sin x$

Soient  $a, b \in \mathbb{R}^*$ .

On a :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \times \sin (x + \alpha) \text{ avec } \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \times \cos (x - \alpha) \text{ avec } \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

#### 3-2/ Transformations de $\sin x$ , $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$

On pose  $t = \tan \frac{x}{2}$  avec  $x \neq \pi + 2k\pi$  et  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

On a :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad ; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad ; \quad \cos x = \frac{2t}{1-t^2}$$

### IV- Équations trigonométriques (Rappel)

#### 4-1/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$

$a$  est un nombre réel donné l'ensemble de solutions de l'équation  $x \in \mathbb{R} / \cos x = a$ .

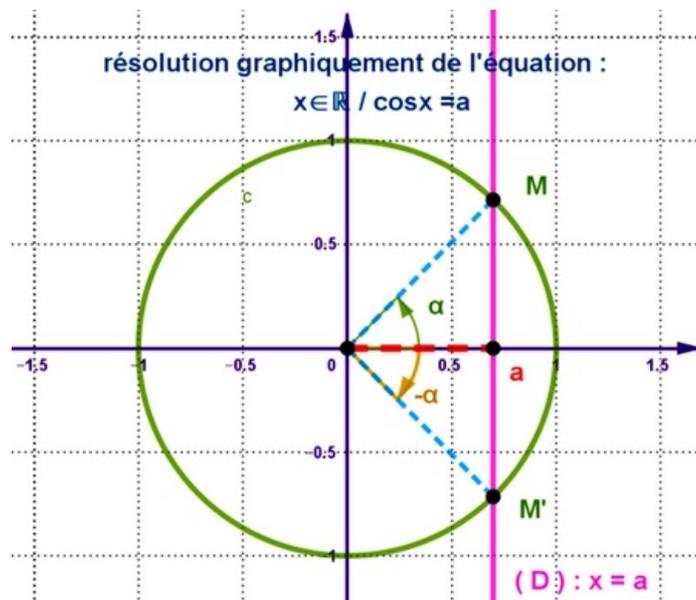
Si  $a \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ , alors  $S = \emptyset$  (pas de solution)

Si  $a \in [-1, 1]$ , on cherche  $\alpha$  tel que  $a = \cos \alpha$ , d'où :

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation est :

$$S = \{\alpha + 2k\pi, -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$$



### Cas particuliers

Si  $a = 1$ , on a  $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Si  $a = -1$ , on a  $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Si  $a = 0$ , on a  $S = \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

### Exemple

#### 4-2/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$

$a$  est un nombre réel donné l'ensemble de solutions de l'équation  
 $x \in \mathbb{R} / \sin x = a$ .

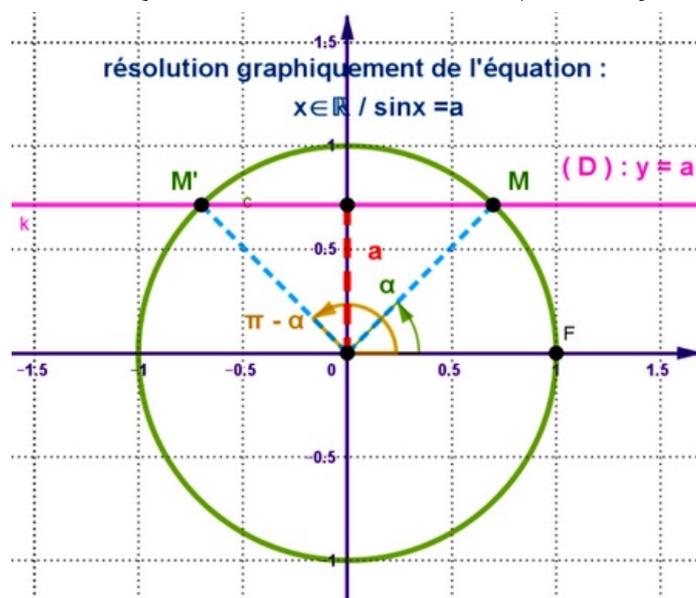
Si  $a \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$ , alors  $S = \emptyset$  (pas de solution)

Si  $a \in [-1, 1]$ , on cherche  $\alpha$  tel que  $a = \sin \alpha$ , d'où :

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation est :

$$S = \{\alpha + 2k\pi, \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}.$$



## Cas particuliers

Si  $a = 1$ , on a  $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

Si  $a = -1$ , on a  $S = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

Si  $a = 0$ , on a  $S = \{ k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$

## Exemple

### 4-3/ Équation de la forme

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} / \tan x = a$$

$a$  est un nombre réel donné l'ensemble de solutions de l'équation

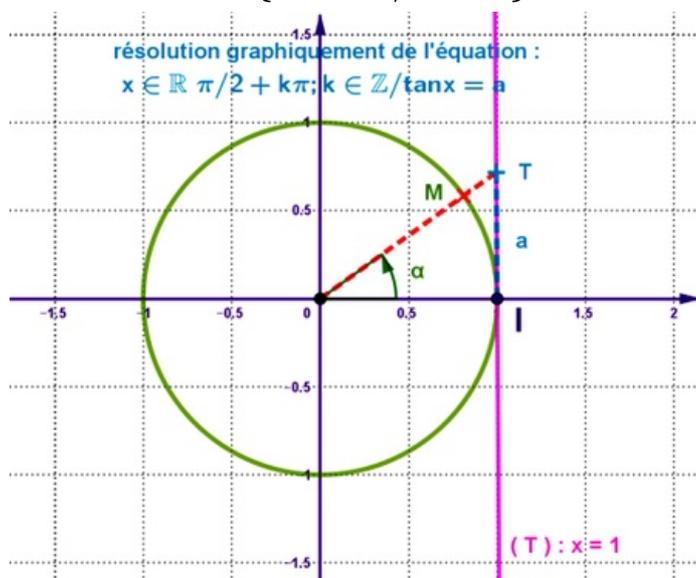
$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} / \tan x = a.$$

On cherche  $\alpha$  tel que  $a = \tan \alpha$ , d'où :

$$\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Par suite l'ensemble de solutions de l'équation est :

$$S = \{ \alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z} \}.$$



### 4-4/ Équation de la forme $x \in \mathbb{R} / a \cos x + b \sin x = c$

Pour résoudre l'équation suivante  $(E) : x \in \mathbb{R} / a \cos x + b \sin x = c$ , on suit les étapes suivantes :

#### Étape 1

On écrit l'équation sous la forme suivante :

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \left[ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right] = c$$

Puis on l'écrit :

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} [\cos \alpha \cos x + \sin \alpha \sin x] = c$$

ou

$$(E) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} [\sin \alpha \cos x + \cos \alpha \sin x] = c$$

Puis on l'écrit :

$$\cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ou

$$\sin(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## Étape 2

Au lieu de résoudre l'équation (E) :  $x \in \mathbb{R} / a \cos x + b \sin x = c$ , on résout l'équation :

$$\cos(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ou

$$\sin(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## Étape 3

Ensemble de solution de l'équation est lié à la valeur de  $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Si  $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \notin [-1, 1]$ , l'équation n'a pas de solution :  $S = \emptyset$

Si  $\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \in [-1, 1]$ , on cherche  $\beta$  tel que  $\cos \beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  (ou  $\sin \beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ )

D'où :

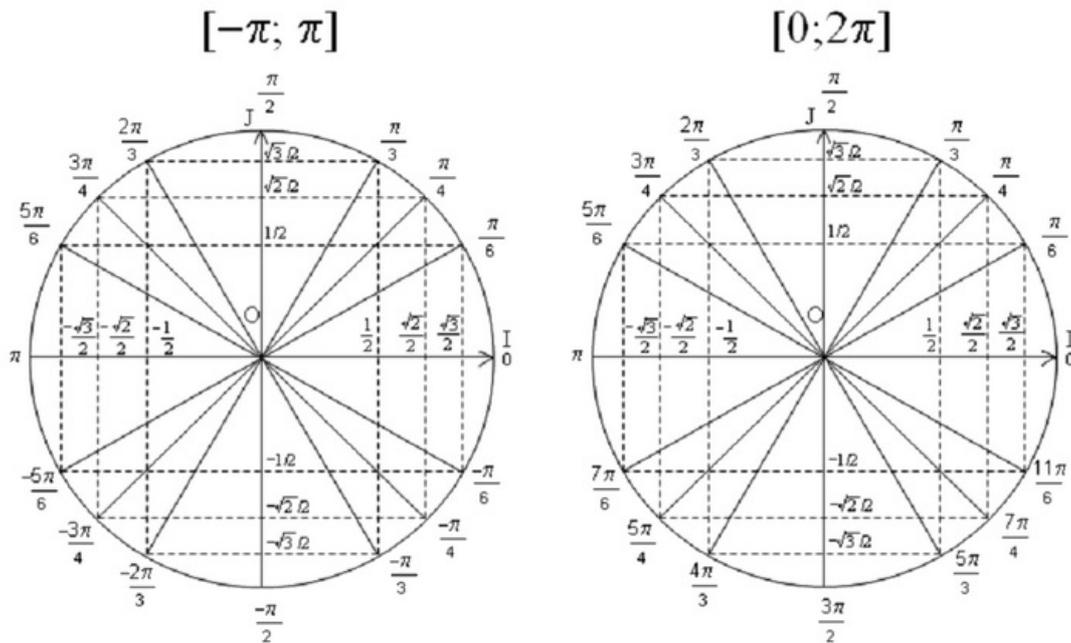
$$(E) \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \cos \beta$$

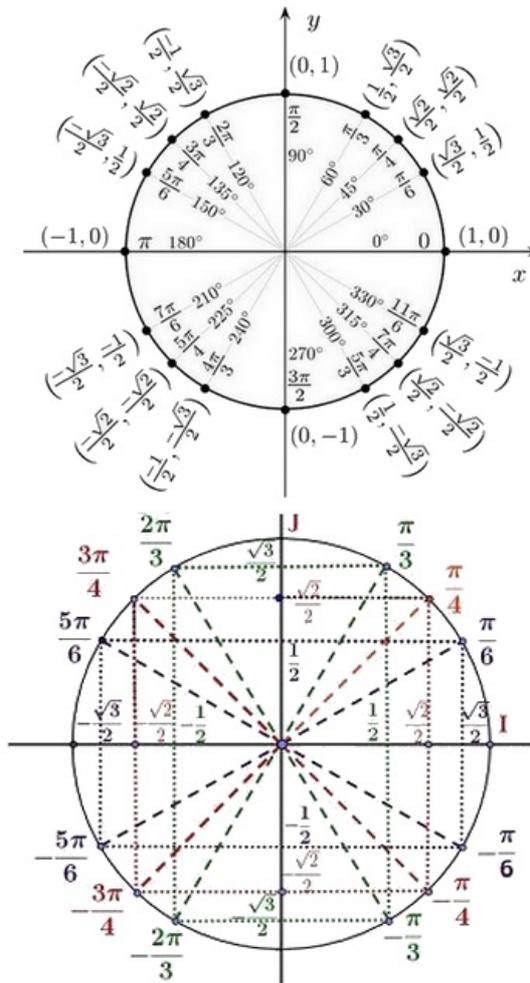
ou

$$(E) \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \sin \beta$$

## Exemple

### V- Cercle trigonométrique





## VI- Exercices

### 6-1/ Exercice 1

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Transformer en produit les expressions suivantes :

$$A(x) = \cos x + \cos 3x$$

$$B(x) = \cos 2x + \cos 4x$$

2. En déduire que :

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 4 \cdot \cos x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5x}{2}\right)$$

3. Montrer que :

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 4 \cdot \cos x \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{5x}{2}\right)$$

### 6-2/ Exercice 2

On considère l'expression suivante :

$$A(x) = 4\sqrt{3} \cos^4 x + \sqrt{3} \sin^2(2x) - 2 \sin(2x); \quad (x \in \mathbb{R})$$

1. Montrer que :  $4 \cos^4 x = 4 \cos^2 x - \sin^2(2x)$
2. En déduire que :  $A(x) = 4 \cos x \cdot \left(\sqrt{3} \cos x - \sin x\right)$
3. Montrer que :  $A(x) = 8 \cos x \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

4. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $A(x) = 0$

### 6-3/ Exercice 3

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $(E_1) : \cos x + \sqrt{3} \sin x = -1$

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $(E_2) : \sqrt{3} \cos(2x) - \sin(2x) = -\sqrt{2}$

3. Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation :  $\sqrt{3} \cos x - \sin x \leq -\sqrt{2}$

### 6-4/ Exercice 4

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :  $A(x) = \sqrt{3} \sin(4x) - 8 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $2 \cos x - 1 = 0$

2. Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : 1 - \cos(4x) = 8 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

3. En déduire que :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : A(x) = 2 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$

4. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $A(x) = 0$

5. Résoudre dans l'intervalle  $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$  l'inéquation :  $A(x) \leq 0$