Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 5 (Les suites numériques)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Généralités sur les suites

1-1/ Définition

I est une partie de $\mathbb{N}$.

Toute application u de I vers $\mathbb{R}$ s'appelle suite numérique : $u\ :\ I \to \mathbb{R}$

$n \mapsto u(n)$

On note simplement la suite par $(u_n)_{n\in I}$.

Exemple

1-2/ Vocabulaire

u_n s'appelle le terme général de la suite.

u_{n_0} s'appelle le premier terme de la suite avec n_0 est le plus petit élément de I.

Le nombre $u_{n_0} + u_{n_0+1} + \ldots + u_n$ s'appelle la somme des $(n - n_0 + 1)$ premiers termes de la suite.

II- Suite majorée – Suite minorée – Suite bornée

Définition

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique, M et m de $\mathbb{R}$.

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite majorée par M équivaut à $\forall n \geq n_0\ ;\ u_n \leq M$ (ou encore $\forall n \geq n_0\ ;\ u_n < M$).

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite minorée par m équivaut à $\forall n \geq n_0\ ;\ u_n \geq m$ (ou encore $\forall n \geq n_0\ ;\ u_n > m$).

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite bornée équivaut à (u_n) est une suite majorée et minorée.

Exemple

III- Monotonie d'une suite

3-1/ Définitions

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique.

La suite est croissante équivaut à $\forall n \geq n_0\ ,\ \forall n' \geq n_0\ :\ n > n' \Rightarrow u_n \geq u_{n'}$.

La suite est strictement croissante équivaut à $\forall n \geq n_0\ ,\ \forall n' \geq n_0\ :\ n > n' \Rightarrow u_n > u_{n'}$.

La suite est décroissante équivaut à $\forall n \geq n_0\ ,\ \forall n' \geq n_0\ :\ n > n' \Rightarrow u_n \leq u_{n'}$.

La suite est strictement décroissante équivaut à $\forall n \geq n_0\ ,\ \forall n' \geq n_0\ :\ n > n' \Rightarrow u_n < u_{n'}$.

La suite est constante équivaut à $\forall n \geq n_0\ ,\ \forall n' \geq n_0\ :\ u_n = u_{n'}$.

3-2/ Propriétés

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique.

La suite est croissante équivaut à $\forall n \geq n_0\ :\ u_{n+1} \geq u_n$.

La suite est strictement croissante équivaut à $\forall n \geq n_0\ :\ u_{n+1} > u_n$.

La suite est décroissante équivaut à $\forall n \geq n_0\ :\ u_{n+1} \leq u_n$.

La suite est strictement décroissante équivaut à $\forall n \geq n_0 \;:\; u_{n+1} < u_n$.

La suite est constante équivaut à $\forall n \geq n_0 \;:\; u_{n+1} = u_n$.

IV- Suite arithmétique

4-1/ Définition

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique, $r \in \mathbb{R}^*$

La suite (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} équivaut à $\forall n \geq n_0 \,;\, u_{n+1} = u_n + r$.

4-2/ Formule du terme général d'une suite arithmétique

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0}.

On a $\forall n \geq n_0 \,;\, u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$.

On a $\forall p, q \geq n_0 \,;\, u_q = u_p + (q - p)r$.

4-3/ Somme des n premier termes d'une suite arithmétique

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} et $n_0 \leq p \leq n$

On a $S_n = \sum\limits_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_n = \left[\frac{u_n + u_p}{2}\right](n - p + 1)$.

Ou encore $S_n = \frac{1er\ terme + dernier\ terme}{2} \times nombre\ de\ termes$

V- Suite géométrique

5-1/ Définition

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique, $q \in \mathbb{R}^*$

La suite (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} équivaut à $\forall n \geq n_0 \,;\, u_{n+1} = u_n \times q$.

5-2/ Formule du terme général d'une suite géométrique

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0}.

On a $\forall n \geq n_0 \,;\, u_n = u_{n_0} \times q^{(n - n_0)}$.

On a $\forall p, h \geq n_0 \,;\, u_h = u_p \times q^{(h - p)}$.

5-3/ Somme des n premier termes d'une suite géométrique

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} et $n_0 \leq p \leq n$

Si $q \neq 1$, on a $S_n = \sum\limits_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_n = u_p \times \left[\frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q - 1}\right]$.

Si $q = 1$, on a $S_n = \sum\limits_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_n = u_p\,(n - p + 1)$.

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} (\forall n \in \mathbb{N}^*)\ U_{n+1} = \frac{n+1}{4n} U_n \\ U_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ V_n = \frac{U_n}{n}$$

1. Calculer U_2, U_3, U_4 et U_5.
2. Calculer V_1, V_2, V_3, V_4 et V_5.

6-2/ Exercice 2

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \frac{3n-2}{4n+1}$.

1. Montrer que la suite (U_n) est majoré par $\frac{3}{4}$.
2. Montrer que la suite (U_n) est minorée par -2.

6-3/ Exercice 3

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = 6n + 3$.

1. Calculer U_0, U_1 et U_2.
2. Montrer que la suite (U_n) est arithmétique.

6-4/ Exercice 4

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U_{n+1} = \frac{1}{5} U_n + 4 \\ U_1 = 4 \end{cases}$$

1. Déterminer U_2 et U_3.
2. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ :\ U_n < 5$.
3. Montrer que la suite (U_n) est croissante, en déduire qu'elle est bornée.

Soit $(V_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $V_n = U_n - 5$.

4. Montrer que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est géométrique, et déterminer sa raison q et son premier terme.
5. Déterminer V_n en fonction de n, en déduire U_n en fonction de n.
6. Calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} V_i = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$
$$T_n = \sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$$

6-5/ Exercice 5

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n+3}{U_n+3} \end{cases}$$

1. Déterminer U_2 et U_3.
2. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ :\ 0 \leq U_n \leq 3$.

Étudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$.

Soit $(V_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $V_n = \frac{U_n-3}{U_n+1}$.

4. Montrer que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est géométrique, et déterminer sa raison q et son premier terme.
5. Déterminer V_n en fonction de n, en déduire U_n en fonction de n.
6. alculer la somme suivante en fonction de n :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} V_i = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$

6-6/ Exercice 6

Soit (U_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - \frac{1}{3} \end{cases}$$

Soit (V_n) la suite définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ V_n = U_n - \alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}).$$

1. Déterminer le nombre α pour lequel la suite (V_n) est géométrique.
2. Exprimer V_n en fonction de n et calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n} V_i = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$.
3. Exprimer U_n en fonction de n et calculer $T_n = \sum_{i=1}^{n} U_i = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$.