

Sommaire

I- Fonction logarithme népérien

1-1/ Définition de la fonction $\ln$

1-2/ Monotonie de la fonction $\ln$

1-3/ Propriétés algébriques

1-4/ Limites usuelles

1-5/ Tableau de variations de la fonction $\ln$

1-6/ Courbe de la fonction $\ln$

1-7/ Limites fondamentales

1-8/ Dérivée logarithmique

I- Fonction logarithme népérien

1-1/ Définition de la fonction $\ln$

Définition 1

La primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ et qui s'annule en 1 est appelée la fonction logarithme népérienne.

On la note $\ln$.

Remarques

Le domaine de définition de la fonction $\ln$ est $]0; +\infty[$, et $\ln(1) = 0$.

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et de plus :

$$(\forall x \in]0; +\infty[) \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

On rappelle que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive définie sur cet intervalle.

I- Fonction logarithme népérien

Applications

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(x+4) - \ln(25-x^2)$$

$$g(x) = \ln(x^2 - 8x + 7)$$

I- Fonction logarithme népérien

1-2/ Monotonie de la fonction ln

Proposition 1

La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

On a alors :

Pour tout $(x, y) \in (]0; +\infty[)^2$:

$$\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y \text{ et } \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ et } \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$$1 \quad \ln(2x-3) = \ln(4-x)$$

$$2 \quad \ln(x^2+x) = \ln(-2x-2)$$

$$3 \quad \ln(3x^2+4x+2) = 0$$

$$4 \quad \ln(4x-5) > \ln(2x+3)$$

1-3/ Propriétés algébriques

Proposition 2

Pour deux réels strictement positifs x et y on a : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ (Propriété fondamentale)

De cette propriété fondamentale on peut déduire les propriétés algébriques de la Proposition 3.

Proposition 3

1- Pour tout réel strictement positif x , on a : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

2- Pour tout $(x, y) \in (]0; +\infty[)^2$, on a : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

3- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tous réels strictement positifs $x_1, x_2, \dots, x_n$, on a :

$$\ln(x_1 x_2 \dots x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \dots + \ln(x_n)$$

C'est-à-dire :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^n x_k\right) = \sum_{k=1}^n \ln(x_k)$$

4- Pour tout $x \in]0; +\infty[$, et pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a : $\ln(x^r) = r \ln x$

Remarques

1- Soit a et b deux réels strictement négatifs.

On a alors $ab > 0$ et $\frac{a}{b} > 0$.

Il s'ensuit donc : $\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b|$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$

2- On a pour tout $x \in]0; +\infty[$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \ln x \text{ et } \ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \ln x$$

1-4/ Limites usuelles

Proposition 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

1-5/ Tableau de variations de la fonction ln

Proposition 5

La fonction $\ln$ est une bijection de l'intervalle $]0; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$. On la note e :

$$\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Remarques

À l'aide de la calculatrice, on trouve comme valeur approchée de e :

2,718281828

On a pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $\ln(e^r) = r$

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$		+	
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

1-6/ Courbe de la fonction ln

Proposition 6

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction $\ln$ dans un repère orthonormé.

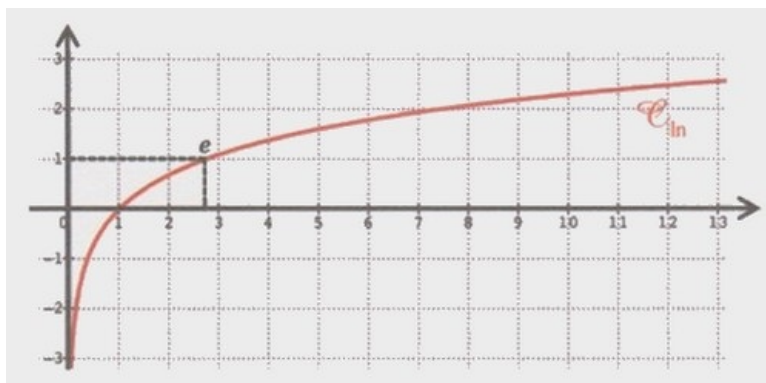
Alors :

La courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

La courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

La courbe $\mathcal{C}$ est concave sur $]0; +\infty[$.



1-7/ Limites fondamentales

Proposition 7

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

On a pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$$

Applications

Calculer les limites suivantes :

$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} \ln x =$ $2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}} =$ $3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) =$ $4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^{2017} + x + 1)}{x} =$ $5 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\ln x + 3} =$	$6 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \ln \left(1 + \frac{4}{x^2} \right)} =$ $7 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln x^2 - 1 } =$ $8 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x-3} \ln \left(\frac{x}{3} \right) =$ $9 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{\ln(x^2 + 3)}}{\sqrt[7]{x\sqrt{x+1}}} =$
---	--

1-8/ Dérivée logarithmique

Proposition 8

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $(\forall x \in I), u(x) \neq 0$.

Alors la fonction $x \mapsto \ln |u(x)|$ est dérivable sur I , et on a : $(\ln |u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Applications

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1 \quad f(x) = \ln |\ln x|$$

$$2 \quad g(x) = x \cdot \sqrt[3]{\ln x - 2}$$

$$3 \quad h(x) = \ln |\cos x|$$

$$4 \quad k(x) = \ln \left(\frac{1}{2 - \ln x} \right)$$

Définition 2

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $(\forall x \in I), u(x) \neq 0$.
La fonction $\frac{u'}{u}$ est appelée la dérivée logarithmique de la fonction u sur l'intervalle I .

Proposition 9

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $(\forall x \in I), u(x) \neq 0$.
Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln |u(x)| + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Applications

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I :

$$1 \quad f(x) = \frac{\sin(2x)}{5 + \sin^2 x} \quad ; \quad I = \mathbb{R}$$

$$2 \quad f(x) = \frac{x-3}{x^2-6x} \quad ; \quad I = \mathbb{R}_+^*$$

$$3 \quad f(x) = \frac{\ln x}{x(\ln^2(x)-1)} \quad ; \quad I = \left] e; +\infty \right[$$

$$4 \quad f(x) = \frac{5x+7}{2x-4} \quad ; \quad I = \left] 2; +\infty \right[$$