AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 4-1-1 : Fonctions logarithmiques - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Fonction logarithme népérien

1-1/ Définition de la fonction ln

1-2/ Monotonie de la fonction ln

1-3/ Propriétés algébriques

1-4/ Limites usuelles

1-5/ Tableau de variations de la fonction ln

1-6/ Courbe de la fonction ln

1-7/ Limites fondamentales

1-8/ Dérivée logarithmique

I- Fonction logarithme népérien

1-1/ Définition de la fonction ln

Définition 1

La primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ et qui s'annule en 1 est appelée la fonction logarithme népérienne.

On la note $\ln$.

Remarques

Le domaine de définition de la fonction $\ln$ est $]0;+\infty[$, et $\ln(1)=0$.

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et de plus :

$$(\forall x \in]0;+\infty[)\ \ln'(x)=\frac{1}{x}$$

On rappelle que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive d éfinie sur cet intervalle.

I- Fonction logarithme népérien

Applications

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln(x+4) - \ln\left(25 - x^2\right)$$
$$g(x) = \ln\left(x^2 - 8x + 7\right)$$

I- Fonction logarithme népérien

1-2/ Monotonie de la fonction ln

Proposition 1

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

On a alors :

Pour tout $(x,y) \in (]0;+\infty[)^2$:

$$\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y \text{ et } \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ et } \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$$1 \quad \ln(2x-3) = \ln(4-x)$$
$$2 \quad \ln\left(x^2+x\right) = \ln(-2x-2)$$
$$3 \quad \ln\left(3x^2+4x+2\right) = 0$$
$$4 \quad \ln(4x-5) > \ln(2x+3)$$

1-3/ Propriétés algébriques

Proposition 2

Pour deux réels strictement positifs x et y on a : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ (Propriété fondamentale)

De cette propriété fondamentale on peut déduire les propriétés algébriques de la Proposition 3.

Proposition 3

1- Pour tout réel strictement positif x, on a : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

2- Pour tout $(x,y) \in (]0;+\infty[)^2$, on a : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

3- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tous réels strictement positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on a :

$$\ln(x_1 x_2, \ldots . x_n) = \ln(x_1) + \ln(x_2) + \ldots + \ln(x_n)$$

C'est-à-dire :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)$$

4- Pour tout $x \in]0;+\infty[$, et pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a : $\ln(x^r) = r \ln x$

Remarques

1- Soit a et b deux réels strictement négatifs.

On a alors $ab > 0$ et $\frac{a}{b} > 0$.

11 s'ensuit donc : $\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b|$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$

2- On a pour tout $x \in]0;+\infty[$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln x \text{ et } \ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\ln x$$

1-4/ Limites usuelles

Proposition 4

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

1-5/ Tableau de variations de la fonction ln

Proposition 5

La fonction ln est une bijection de l'intervalle $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$. On la note e :

$$\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Remarques

À l'aide de la calculatrice, on trouve comme valeur approchée de e : 2,718281828

On a pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $ln(e^r) = r$

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	+	
$\ln(x)$	‖ $-\infty$	0 ↗	$+\infty$

1-6/ Courbe de la fonction ln

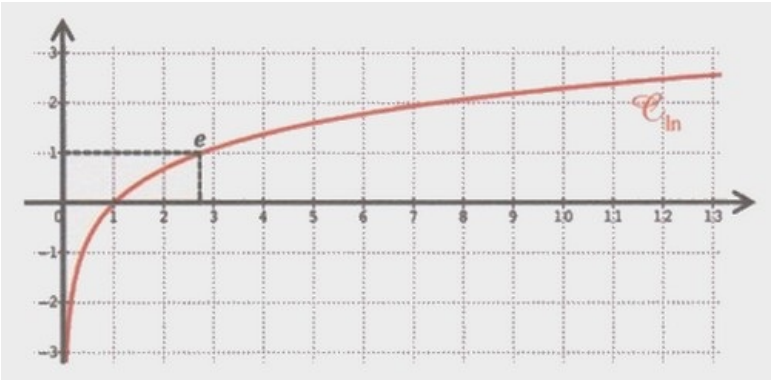
Proposition 6

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé. Alors :

La courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

La courbe $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

La courbe $\mathscr{C}$ est concave sur $]0;+\infty[$.



1-7/ Limites fondamentales

Proposition 7

On a :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \;\;;\;\; \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = 1 \;\;;\;\; \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

On a pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^r} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$$

Applications

Calculer les limites suivantes :

$$1\;\lim_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}\ln x =$$
$$2\;\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}} =$$
$$3\;\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) =$$
$$4\;\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^{2017}+x+1\right)}{x} =$$
$$5\;\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln x+3} =$$
$$6\;\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} =$$
$$7\;\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln|x^2-1|} =$$
$$8\;\lim_{x\to 3}\frac{2x}{x-3}\ln\left(\frac{x}{3}\right) =$$
$$9\;\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{\ln(x^2+3)}}{\sqrt[7]{x\sqrt{x}+1}} =$$

1-8/ Dérivée logarithmique

Proposition 8

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $(\forall x \in I)\ ,\ u(x) \neq 0$.

Alors la fonction $x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I, et on a : $(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Applications

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1\;\; f(x) = \ln|\ln x|$$
$$2\;\; g(x) = x.\sqrt[3]{\ln x - 2}$$
$$3\;\; h(x) = \ln|\cos x|$$
$$4\;\; k(x) = \ln\left(\frac{1}{2-\ln x}\right)$$

Définition 2

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $(\forall x \in I)\ ,\ u(x) \neq 0$.

La fonction $\frac{u'}{u}$ est appelée la dérivée logarithmique de la fonction u sur l'intervalle I.

Proposition 9

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $(\forall x \in I)\ ,\ u(x) \neq 0$.

Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Applications

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I :

$$1 \;\; f(x) = \frac{\sin(2x)}{5+\sin^2 x} \quad ; \quad I = \mathbb{R}$$

$$2 \;\; f(x) = \frac{x-3}{x^2-6x} \quad ; \quad I = \mathbb{R}_-^*$$

$$3 \;\; f(x) = \frac{\ln x}{x\left(\ln^2(x)-1\right)} \quad ; \quad I = \left]e; +\infty\right[$$

$$4 \;\; f(x) = \frac{5x+7}{2x-4} \quad ; \quad I = \left]2; +\infty\right[$$