

Mathématiques: 2Bac SMA-SMB

Séance 3-3-2 : Dérivation et étude des fonctions - Partie 3 (Exercices)

Professeur: Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

IIX- Exercices III

8-1/ Exercice 3-1

8-2/ Exercice 3-2

8-3/ Exercice 3-3

8-4/ Exercice 3-4

IIX- Exercices III

8-1/ Exercice 3-1

On considère la fonction f tel que $f(x)=2x-(x+1)^{rac{2}{3}}.$

- 1. Déterminer D_f , le domaine de définition de f, et calculer $\lim_{x o +\infty} f(x)$.
- 2. Étudier l'asymptote de la courbe \mathscr{C}_f au voisinage de $+\infty$.

Soit g le prolongement de f à droite de -1.

- 3. Étudier la dérivabilité de la fonction g à droite de -1.
- 4. Calculer f'(x), et donner le tableau de variations de f.
- 5. Montrer que \mathscr{C}_f coupe l'axe des abscisses en à point d'abscisse $lpha \in]4;5[$ (On prend $2^{\frac{2}{3}} < 2$).
- 6. Tracer \mathscr{C}_f .

8-2/ Exercice 3-2

Partie I

On considère la fonction f définie sur $I=\left[0;rac{\pi}{2}
ight]$ par :

$$\left(orall x\in\left[0;rac{\pi}{2}
ight[
ight);\,f\left(x
ight)=Arc an\left(\sqrt{ an x}
ight)$$
 et $f\left(rac{\pi}{2}
ight)=rac{\pi}{2}$

- 1. Montrer que f est continue sur I.
- 2. Étudier la dérivabilité de f à droite de 0.
- 3. Montrer que f est strictement croissante sur I, et donner le tableau de variations de f.

- 4. Montrer que \mathscr{C}_f a un point de symétrie $\Omega\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.
- 5. Résoudre dans I l'équation $(E):f\left(x
 ight) =x$, et étudier le signe de $f\left(x
 ight) -x$.
- 6. Tracer \mathscr{C}_f dans un un repère orthonormé $\left(O,\stackrel{\rightarrow}{i},\stackrel{\rightarrow}{j}\right)$ (Unité : 2cm).

Partie II

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{egin{aligned} u_{0}\in I\ (orall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1}=f\left(u_{n}
ight) \end{aligned}
ight.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante.

On suppose que $u_0 \not\in \left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

8-3/ Exercice 3-3

On considère la fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ par :

$$\left\{egin{aligned} f\left(x
ight) = rac{Arc an\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \; ; \; x > -1 \ f\left(-1
ight) = 1 \end{aligned}
ight.$$

- 1. Montrer que la fonctio f est continue à droite du point $x_0=-1$.
- 2. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

Soit $X\in]0;+\infty[$, on pose $arphi\left(t
ight) =t^{3}\left(Arc anX-X
ight) -X^{3}\left(Arc ant-t
ight) .$

- 3. Montrer que φ est dérivable sur l'intervalle]0;X[et calculer la dérivée φ ' (t)
- 4. Montrer que $(\exists c \in]0,X[)$ $rac{Arc an X-X}{X^3}=rac{-1}{3(1+c^2)}.$
- 5. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite du point $x_0=-1$.
- 6. Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que :

$$(orall X \in \mathbb{R}^+) \ rac{X}{1+X^2} \leq Arc an X \leq X$$

7. Montrer que:

$$(orall x \in]1;+\infty[) \ f'(x) = rac{1}{2\sqrt{\left(x+1
ight)^3}} \left(rac{\sqrt{x+1}}{x+2} - Arc an\sqrt{x+1}
ight)$$

- 8. Conclure que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
- 9. Montrer que l'équation f(x)=x admet une solution unique lpha, et que $lpha\in]0;1[.$
- 10. Tracer \mathscr{C}_f . (On prend $lpha \simeq 0,7$)

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$g\left(x
ight) =rac{x}{1+x^{2}}-Arc an x$$

- 11. Calculer g'(x) et donner le tableau de variations de g.
- 12. Conclure que $(orall X \in \mathbb{R}^+) \ |g\left(x
 ight)| \leq rac{\pi}{2}.$
- 13. Montrer que $(\forall X \in]0;1[) \ |f'(x)| \leq \frac{\pi}{4}.$

On considère la suite numérique $\left(u_{n}
ight)_{n}$ définie par :

$$\left\{egin{aligned} u_0 = rac{1}{2} \ u_{n+1} = f\left(u_n
ight) \end{aligned}
ight.$$

- 14. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 0 < u_n < 1$
- 15. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ |u_{n+1} \alpha| \leq \frac{\pi}{4} \, |u_n \alpha|.$
- 16. Montrer que $(u_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

8-4/ Exercice 3-4

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f ainsi que les intervalles où elle est définie :

$$egin{array}{ll} 1 \;\; f(x) = x^2 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \ 2 \;\; f(x) = rac{1}{x^2} + rac{3}{x^3} \ 3 \;\; f(x) = rac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

$$2 \,\, f(x) = rac{1}{x^2} + rac{3}{x^3}$$

$$3 \,\, f\left(x
ight) = rac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$4 f(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^3$$

$$5 f(x) = x\sqrt[3]{x^2 - 1}$$

$$egin{array}{l} 6 \ f\left(x
ight) = sinx.\cos^3 x \ 7 \ f\left(x
ight) = rac{x^2}{1+x^6} \end{array}$$

$$7 \ f(x) = \frac{x^2}{1+x^6}$$

$$8 f(x) = \sin x \cdot \cos 2x$$