Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 3-3-2 : Dérivation et étude des fonctions - Partie 3 (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

IIX- Exercices III

8-1/ Exercice 3-1

On considère la fonction f tel que $f\left(x\right)=2x-\left(x+1\right)^{\frac{2}{3}}$.

1. Déterminer D_f, le domaine de définition de f, et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$.
2. Étudier l'asymptote de la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Soit g le prolongement de f à droite de -1.

3. Étudier la dérivabilité de la fonction g à droite de -1.
4. Calculer $f’\left(x\right)$, et donner le tableau de variations de f.
5. Montrer que $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en à point d'abscisse $\alpha\in]4;5[$ (On prend $2^{\frac{2}{3}}<2$).
6. Tracer $\mathscr{C}_f$.

8-2/ Exercice 3-2

Partie I

On considère la fonction f définie sur $I=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\right)\ ;\ f\left(x\right)=Arc\tan\left(\sqrt{\tan x}\right)\text{ et } f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

1. Montrer que f est continue sur I.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite de 0.
3. Montrer que f est strictement croissante sur I, et donner le tableau de variations de f.

4. Montrer que $\mathscr{C}_f$ a un point de symétrie $\Omega\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.
5. Résoudre dans I l'équation (E) : $f(x) = x$, et étudier le signe de $f(x) - x$.
6. Tracer $\mathscr{C}_f$ dans un un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ (Unité : $2cm$).

Partie II

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante.

On suppose que $u_0 \notin \left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

8-3/ Exercice 3-3

On considère la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{Arc\tan\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\ ;\ x > -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonctio f est continue à droite du point $x_0 = -1$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

Soit $X \in]0; +\infty[$, on pose $\varphi(t) = t^3\left(Arc\tan X - X\right) - X^3\left(Arc\tan t - t\right)$.

3. Montrer que φ est dérivable sur l'intervalle $]0; X[$ et calculer la dérivée $\varphi'(t)$.
4. Montrer que $(\exists c \in]0, X[)\ \frac{Arc\tan X - X}{X^3} = \frac{-1}{3(1+c^2)}$.
5. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite du point $x_0 = -1$.
6. Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que :
$$(\forall X \in \mathbb{R}^+)\ \frac{X}{1+X^2} \le Arc\tan X \le X$$
7. Montrer que :
$$(\forall x \in]1; +\infty[)\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{x+2} - Arc\tan\sqrt{x+1}\right)$$
8. Conclure que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.
9. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α, et que $\alpha \in]0; 1[$.
10. Tracer $\mathscr{C}_f$. (On prend $\alpha \simeq 0,7$)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2} - Arc\tan x$$

11. Calculer $g'(x)$ et donner le tableau de variations de g.
12. Conclure que $(\forall X \in \mathbb{R}^{+})\ |g(x)| \leq \frac{\pi}{2}$.
13. Montrer que $(\forall X \in]0;1[)\ |f'(x)| \leq \frac{\pi}{4}$.

On considère la suite numérique $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

14. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < 1$.
15. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\pi}{4} |u_n - \alpha|$.
16. Montrer que $(u_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

8-4/ Exercice 3-4

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f ainsi que les intervalles où elle est définie :

$1\ \ f(x) = x^2 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ $2\ \ f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ $3\ \ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $4\ \ f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x} - 1\right)^3$	$5\ \ f(x) = x\sqrt[3]{x^2-1}$ $6\ \ f(x) = sinx.\cos^3 x$ $7\ \ f(x) = \frac{x^2}{1+x^6}$ $8\ \ f(x) = \sin x.\cos 2x$