AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 3-3-1 : Dérivation et étude des fonctions - Partie 3 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

VI- Étude des fonctions numériques (Rappels)

6-1/ Monotonie d'une fonction numérique

6-2/ Axe de symétrie - Centre de symétrie

6-3/ Les fonctions périodiques

6-4/ Étude de la concavité d'une courbe

6-5/ Étude des branches infinies (Rappel)

VII- Les fonctions primitives

7-1/ Primitive d’une fonction sur un intervalle

7-2/ Primitives d'une fonction continue

7-3/ Opérations sur les primitives

7-4/ Tableau des primitives usuelles

VI- Étude des fonctions numériques (Rappels)

6-1/ Monotonie d'une fonction numérique

Proposition 10

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- La fonction f est constante sur I si, et seulement, si : $(\forall x \in I),\ f'(x) = 0$
- La fonction f est croissante sur I si, et seulement, si : $(\forall x \in I),\ f'(x) \geq 0$
- La fonction f est décroissante sur I si, et seulement, si : $(\forall x \in I),\ f'(x) \leq 0$

Remarques

Les résultats de la proposition 10 ne sont valables que sur un intervalle.

Si f' est positive sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est strictement croissante sur I.

Si f' est négative sur I et ne s'y annule qu'en un nombre fini de points, alors la fonction f est
strictement décroissante sur I.

6-2/ Axe de symétrie - Centre de symétrie

Proposition 11

Soit f une fonction numérique et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Pour que la droite Δ d'équation $x = a$ soit un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que pour tout $x \in D_f$: $(2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.

Proposition 12

Soit f une fonction numérique et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère donné.

Pour que le point $\Omega(a, b)$ soit un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que pour tout $x \in D_f$: $(2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$

Remarques

Si f est une fonction paire, alors sa courbe $\mathscr{C}_f$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Si f est une fonction impaire, alors $\mathscr{C}_f$ admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Si la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie ou admet le point de coordonnées (a, b) comme centre de symétrie alors on peut restreindre l'étude de la fonction f sur l'ensemble $D_{étude} = D_f \cap \left[a, +\infty\right[$.

6-3/ Les fonctions périodiques

Définition 5

Soit f une fonction numérique de domaine de définition D_f.

On dit que f est périodique s'il existe un réel non nul T tel que pour tout $x \in D_f$:

$$(x + T) \in D_f \text{ et } (x - T) \in D_f \text{ et } f(x + T) = f(x)$$

Le nombre réel T est appelé alors une période de f.

La plus petite période strictement positive de la fonction f est appelée la période de la fonction f.

Proposition 13

Soit f une fonction périodique de période T et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre nT est aussi une période de la fonction f.

La courbe de $\mathscr{C}_f$ est invariante par toute translation de vecteur $nT.\overrightarrow{i}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Si $x_0 \in \mathbb{R}$ est un réel donné, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est la réunion des images de l'ensemble $\left\{M\left(x, f\left(x\right)\right)/x \in D_f \cap \left[x_0, x_0+T\right[\right\}$ par toutes les translations de vecteur $nT.\overrightarrow{i}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, pour étudier une fonction périodique de période T, il suffit de l'étudier sur un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur T. (Très souvent, on choisit un des deux intervalles $[0, T[$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right[$).

6-4/ Étude de la concavité d'une courbe

Proposition 14

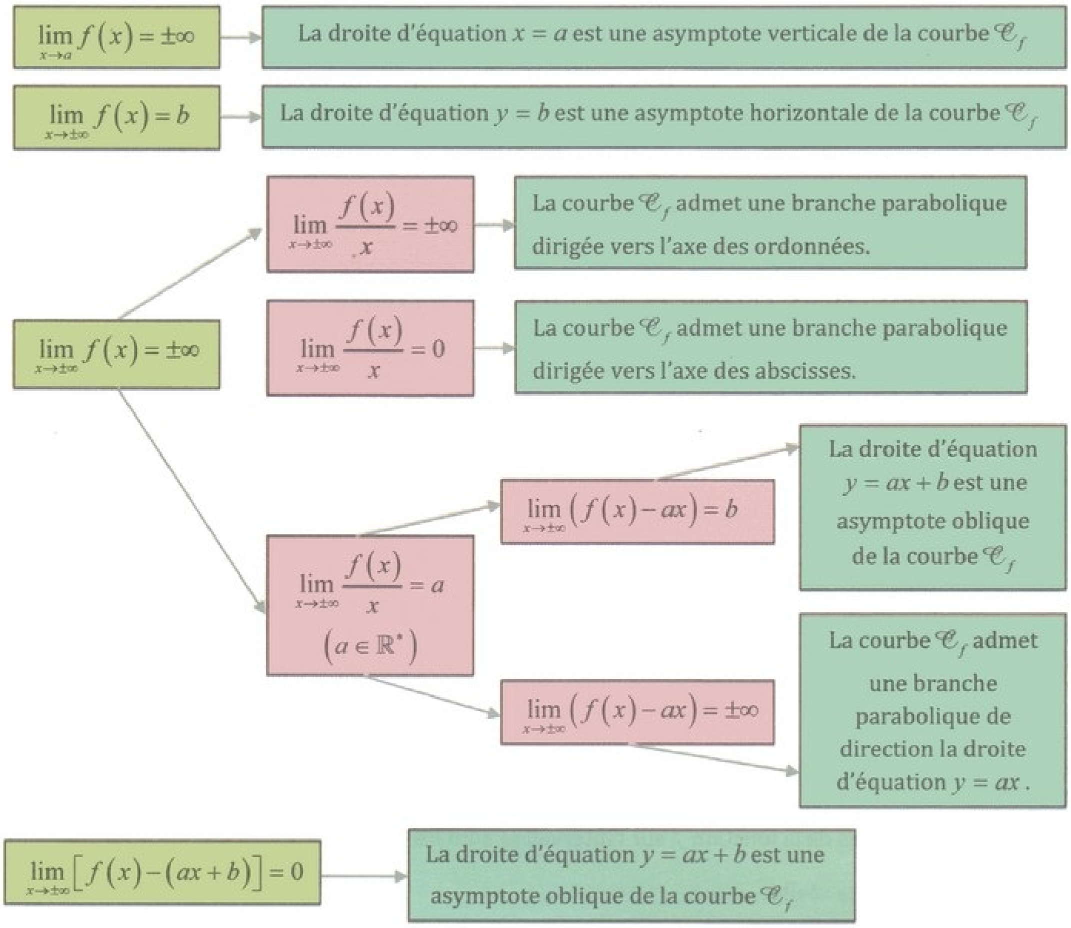
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

Pour que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f soit convexe sur I, il faut et il suffit que :
$(\forall x \in I)\ ,\ f"\left(x\right) \geq 0$

Pour que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f soit concave sur I, il faut et il suffit que :
$(\forall x \in I)\ ,\ f"\left(x\right) \leq 0$

Pour que le point $M_0(x_0, f(x_0))$ soit un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$, il faut et il suffit que la dérivée seconde s'annule en x_0 et change de signe de part et d'autre de x_0.

6-5/ Étude des branches infinies (Rappel)



VII- Les fonctions primitives

7-1/ Primitive d'une fonction sur un intervalle

Définition 7

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f sur I si :

F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $F'(x) = f(x)$

Proposition 15

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive définie sur cet intervalle.

7-2/ Primitives d'une fonction continue

Proposition 16

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si F est une primitive de la fonction f sur I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + c$ où c est une constante réelle.

Pour tout $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive G de f sur I vérifiant : $G(x_0) = y_0$.

7-3/ Opérations sur les primitives

Proposition 17

Si F et G sont respectivement des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors :

$F+G$ est une primitive de la fonction $f+g$ sur I.

Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha F+\beta G$ est une primitive de $\alpha f+\beta g$ sur I.

7-4/ Tableau des primitives usuelles

La fonction f	Les primitives F de f	L'intervalle I
0	$c \quad (c \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto ax+c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*-\{1\})$	$x \mapsto \frac{1}{(1-n)x^{n-1}}+c$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x \mapsto x^r \quad (r \in \mathbb{Q}^*-\{1\})$	$x \mapsto \frac{x^{r+1}}{r+1}+c$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x+c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x+c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x+c$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto \sin(ax+b) \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax+b) \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \operatorname{Arc}\tan x+c$	$\mathbb{R}$
$u'v+uv'$	$uv+c$	Intervalle où u et v sont dérivables
$-\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}+c$	Intervalle où u est dérivable et ne s'annule pas
$u'u^r \quad (r \in \mathbb{Q}^*-\{1\})$	$\frac{u^{r+1}}{r+1}+c$	Intervalle où u est dérivable et u^r est définie
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{Arc}\tan u+c$	Intervalle où u est dérivable
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}+c$	Intervalle où u et v sont dérivables et v ne s'annule pas