



## Mathématiques : Tronc Commun

Séance 9 (Trigonométrie 1 - Règles du calcul trigonométrique)

**Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak**

### Sommaire

#### I- Cercle trigonométrique

1-1/ Définition

1-2/ Remarque

1-3/ Abscisses curvilignes

#### II- Angle orienté de deux demi-droites – de deux vecteurs non nuls

2-1/ Radian – grade

2-2/ Mesure d'un angle orienté de deux demi-droites

2-3/ Angle déterminé par deux vecteurs non nuls

#### III- Lignes trigonométriques du réel $x$

#### IV- Signe de $\sin x$ et $\cos x$ et $\tan x$

4-1/ Quadrant d'un cercle

4-2/ Signes des lignes trigonométriques

4-3/ Angles remarquables

#### V- Relations entre les angles

5-1/ Angles opposés

5-2/ Angles supplémentaires

5-3/ Angles opposés supplémentaires

5-4/ Angles complémentaires

5-5/ Angles opposés complémentaires

5-6/ Résumé des formules précédentes

#### VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

## 6-3/ Exercice 3

## 6-4/ Exercice 4

### I- Cercle trigonométrique

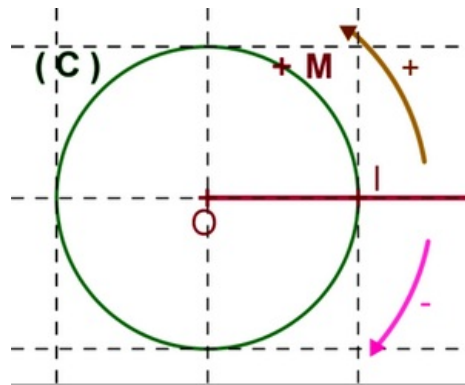
#### 1-1/ Définition :

Tout cercle  $(C)$  du plan  $(P)$  tel que :

- que son rayon est  $r = 1$ .
- qui est muni d'un origine  $I$ .
- qui est orienté positif ( qui est le sens contraire de la rotation des aiguilles du montre ).

Ce cercle  $(C)$  est appelé cercle trigonométrique.

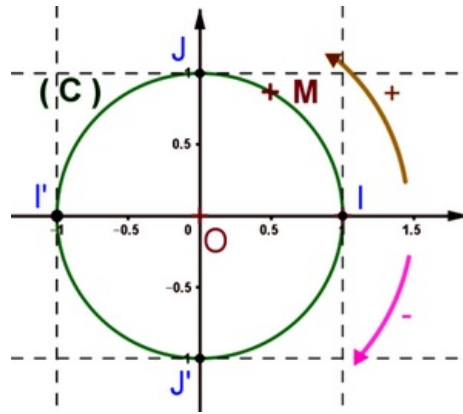
Si tous les cercles du plan sont orientés d'une orientation positive, on dit que le plan est orienté positif (ou direct).



#### 1-2/ Remarque

Si le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$  et  $O$  est le centre du cercle  $(C)$  et le point  $J$  est placé dans le sens positif, on dit que le cercle trigonométrique  $(C)$  est lié au repère orthonormé  $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = (O, \vec{i}, \vec{j})$  (avec  $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$  et  $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ ).

Pour tout le cours : le cercle  $(C)$  est le cercle trigonométrique d'origine  $I$  et son centre est le point  $O$ .



## I- Cercle trigonométrique

### 1-3/ Abscisses curvilignes

$M_{(\alpha+2k\pi)}$  est un point de  $(C)$ , il existe un et un seul abscisse curviligne de  $M$  qui appartienne à  $] -\pi, \pi]$  ( c.à.d.  $-\pi < \alpha \leq \pi$ ). Cet abscisse est appelé abscisse curviligne principal de  $M$ .

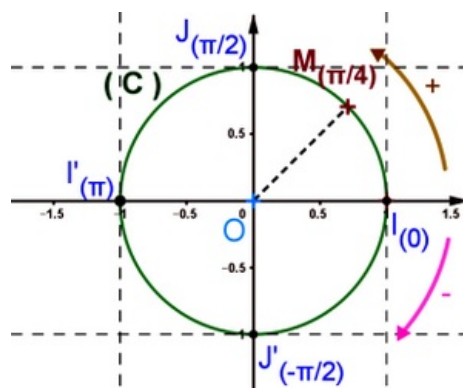
Si  $M$  est situé sur le demi cercle «supérieure», la mesure principale appartient à  $[0, \pi]$ , sinon la mesure principale appartient à  $] -\pi, 0]$ .

Les abscisses curvilignes de  $I$  sont  $0 + 2k\pi = 2k\pi$ , donc l'abscisse curviligne principale de  $I$  est .

Les abscisses curvilignes de  $J$  sont  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , donc l'abscisse curviligne principale de  $J$  est  $\frac{\pi}{2}$ .

Les abscisses curvilignes de  $I'$  sont  $\pi + 2k\pi$ , donc l'abscisse curviligne principale de  $I'$  est  $\pi$ .

Les abscisses curvilignes de  $J'$  sont  $\frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ , donc l'abscisse curviligne principale de  $J'$  est  $\frac{-\pi}{2}$ .



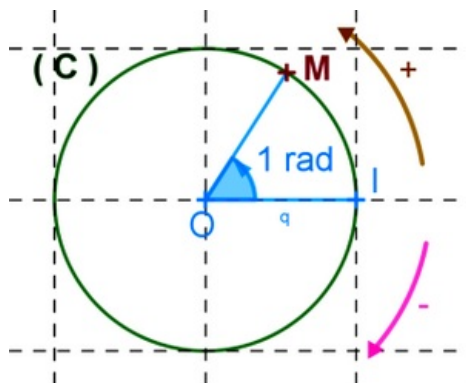
## II- Angle orienté de deux demi-droites – de deux vecteurs non nuls

### 2-1/ Radian – grade

#### Définition

$A$  et  $B$  deux points du cercle trigonométrique  $(C)$  d'origine  $I$  et son centre est le point  $O$  et  $M$  un point de  $(C)$  .

- La longueur de l'arc géométrique  $IM$  intercepte par l'angle géométrique  $IOM$  est la mesure de  $IOM$  en radian et se note  $rad$  ou  $rd$ .
- la mesure d'un angle plat en radian est égale à  $180^\circ = \pi rad$
- la mesure d'un angle droit en radian est égale à  $90^\circ = \frac{\pi}{2} rad$



### Remarque

Il existe une autre unité de mesure des angles, on l'appelle grade

On la note par  $gr$  tel que  $180^\circ = \pi rad = 200gr$  et  $90^\circ = \frac{\pi}{2} rad = 100gr$

Si la mesure d'un angle est  $x$  et  $y$  et  $z$  respectivement en degré et radian et grade, alors  $\frac{x}{180} = \frac{y}{\pi} = \frac{z}{200}$ .

### Exemple

## 2-2/ Mesure d'un angle orienté de deux demi-droites

### Définition 1

Soit  $[OA)$  et  $[OB)$  deux demi droites du plan  $(P)$  tel que  $A \neq O$  et  $B \neq O$ .

Le couple  $([OA), [OB))$  est appelé l'angle orienté des demi-droites, on le note  $(OA, OB)$ .

Le couple  $([OB), [OA))$  détermine un autre angle orienté, on le note  $(OB, OA)$  qui est différent de l'angle  $(OA, OB)$ .

### Définition 2

On considère dans le plan  $(P)$  deux points  $A$  et  $B$  puis le cercle trigonométrique  $(C)$  de centre  $O$  tel que  $A \neq O$  et  $B \neq O$ .

Les deux demi-droites  $[OA)$  et  $[OB)$  coupent respectivement en  $A'_{(\alpha)}$  et  $B'_{(\beta)}$  tel que leurs abscisses curvilignes sont  $\alpha$  et  $\beta$ . On a :

- Les mesures de l'angle orienté  $(OA, OB)$  sont les nombres réels  $\beta - \alpha + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ),

On note  $(\overline{OA, OB}) \equiv \beta - \alpha [2\pi]$  ou encore  $(\overline{OA, OB}) = \beta - \alpha + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

On lit : mesures de l'angle orienté  $(OA, OB)$  congrue à  $\beta - \alpha$  modulo  $2\pi$ .

- La mesure qui vérifie  $(\beta - \alpha + 2k\pi) \in ]-\pi, \pi]$  s'appelle la mesure principale de l'angle orienté  $(OA, OB)$ .

## Exemple

### Propriété

Le plan  $(P)$  est orienté positif,  $O$  est un point de  $(P)$ .

Soient  $[OA)$  et  $[OB)$  et  $[OC)$  trois demi-droites de  $(P)$ .

On a :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}) \equiv 0 [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv -(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) [2\pi] : \text{Relation de chasles}$$

## Exemple

### 2-3/ Angle déterminé par deux vecteurs non nuls

#### Définition

Le plan  $(P)$  est orienté positif,  $O$  est un point de  $(P)$ .

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls de  $(P)$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux points de  $(P)$  tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ .

L'angle orienté des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est l'angle orienté  $(OA, OB)$  (c.à.d. des deux demi-droites  $[OA)$  et  $[OB)$ , on le note  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

Les mesures de l'angle orienté  $(OA, OB)$  sont appelées les mesures de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$ , on note  $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ .

$$\text{On a : } (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) [2\pi]$$

La mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \vec{v})$  qui appartienne à  $] -\pi, \pi]$  est appelée la mesure principale de  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

## Exemple

### Propriété

Le plan  $(P)$  est orienté positif,  $O$  est un point de  $(P)$ .

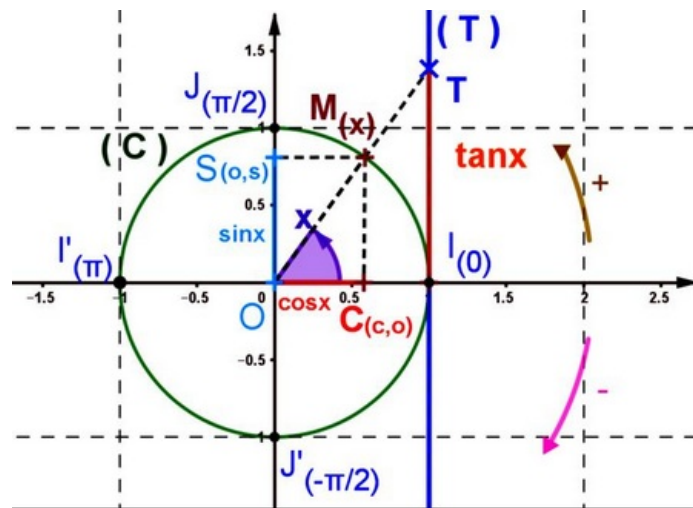
Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs non nuls de  $(P)$ .

On a :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) \equiv 0 [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) [2\pi]$$

$$(\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}) : \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ et } 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$



## IV- Signe de $\sin x$ et $\cos x$ et $\tan x$

### 4-1/ Quadrant d'un cercle

On divise le cercle en quatre arcs de même longueur suivant le sens positif.

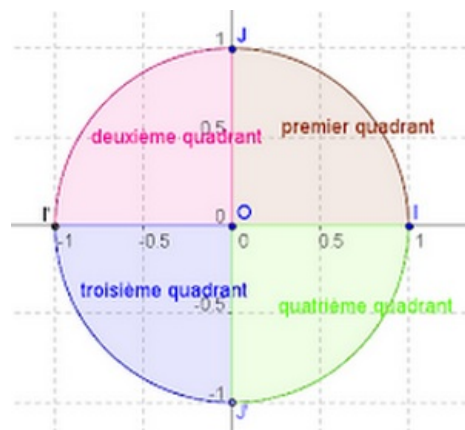
$x$  est une abscisse curviligne du point  $M_{(x)} \in (C)$ .

Le 1er arc  $IJ$  : si  $M_{(x)} \in IJ$  on dit que  $M_{(x)}$  est situé dans le premier quadrant.

Le 2ème arc  $JJ'$  : si  $M_{(x)} \in JJ'$  on dit que  $M_{(x)}$  est situé dans le deuxième quadrant.

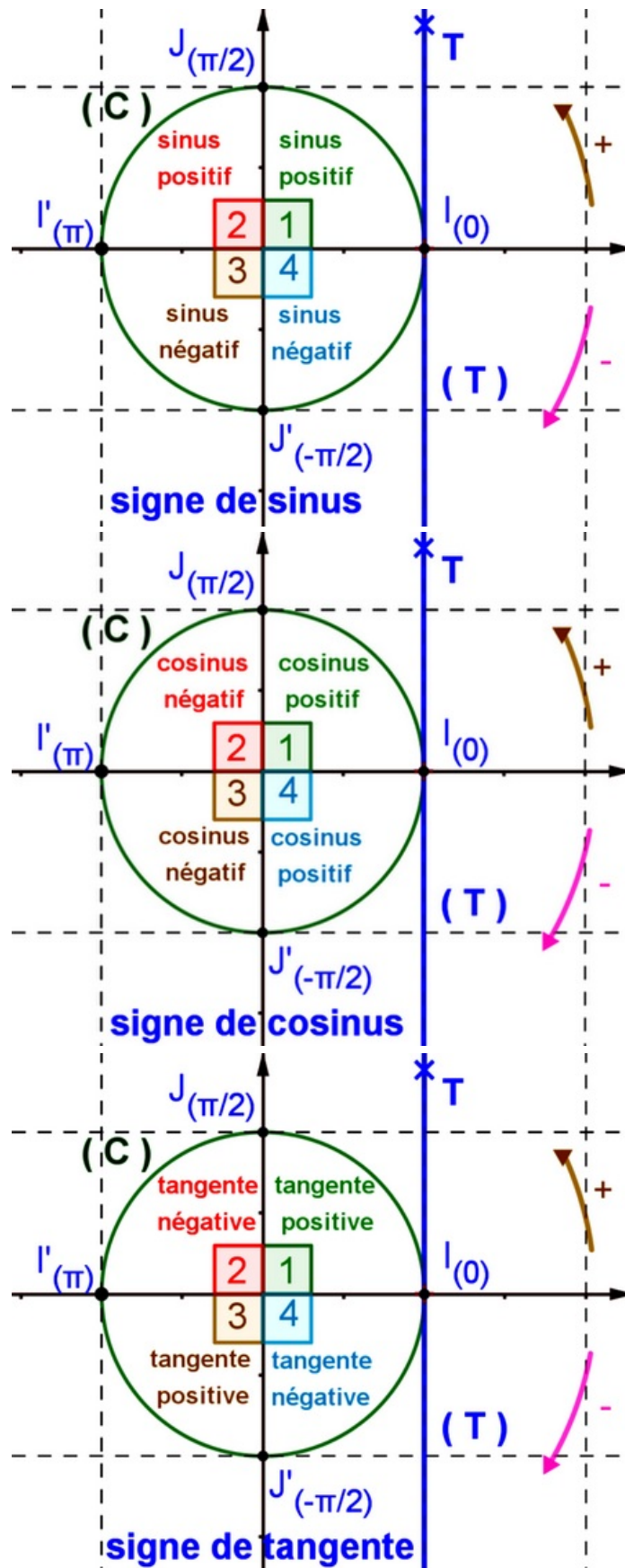
Le 3ème arc  $I'J'$  : si  $M_{(x)} \in I'J'$  on dit que  $M_{(x)}$  est situé dans le troisième quadrant.

Le 4ème arc  $J'I$  : si  $M_{(x)} \in J'I$  on dit que  $M_{(x)}$  est situé dans le quatrième quadrant



### 4-2/ Signes des lignes trigonométriques

| est situé au $M_{(x)}$ | Quadrant n° 1 | Quadrant n° 2 | Quadrant n° 3 | Quadrant n° 4 |
|------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\sin x$               | +             | +             | -             | -             |
| $\cos x$               | +             | -             | -             | +             |
| $\tan x$               | +             | -             | +             | -             |

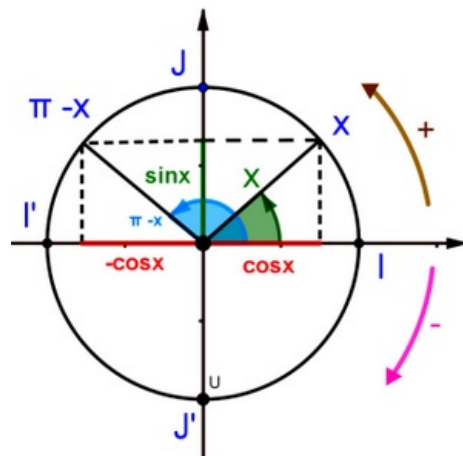


4-3/ Angles remarquables



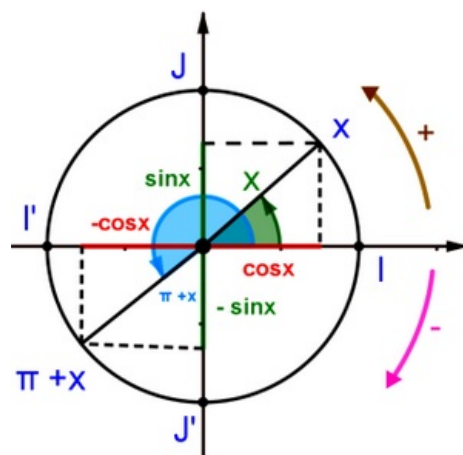
## 5-2/ Angles supplémentaires

$$\begin{aligned}\sin(\pi - x) &= \sin x \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \tan(\pi - x) &= -\tan x\end{aligned}$$



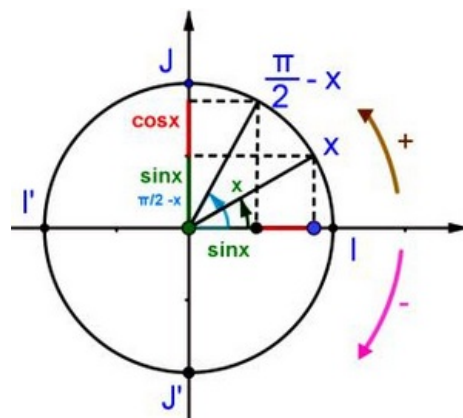
## 5-3/ Angles opposés supplémentaires

$$\begin{aligned}\sin(\pi + x) &= -\sin x \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x \\ \tan(\pi + x) &= -\tan x\end{aligned}$$



## 5-4/ Angles complémentaires

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{1}{\tan x}\end{aligned}$$

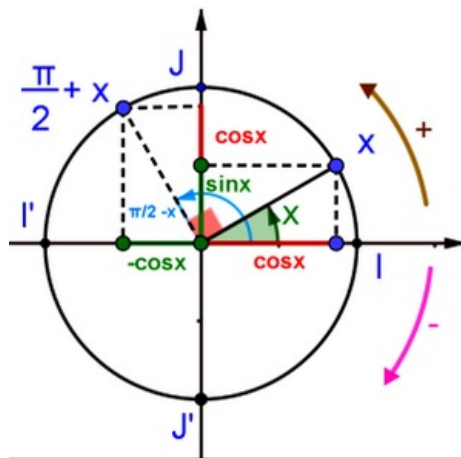


## 5-5/ Angles opposés complémentaires

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{-1}{\tan x}$$



## 5-6/ Résumé des formules précédentes

|  | $-x$      | $\pi - x$ | $\pi + x$ | $\frac{\pi}{2} - x$ | $\frac{\pi}{2} + x$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|---------------------|---------------------|
| $\sin \nearrow$                                                                   | $-\sin x$ | $\sin x$  | $-\sin x$ | $\cos x$            | $\cos x$            |
| $\cos \nearrow$                                                                   | $\cos x$  | $-\cos x$ | $-\cos x$ | $\sin x$            | $-\sin x$           |
| $\tan \nearrow$                                                                   | $-\tan x$ | $-\tan x$ | $\tan x$  | $\frac{1}{\tan x}$  | $\frac{-1}{\tan x}$ |

## VI- Exercices

### 6-1/ Exercice 1

Soit  $(C)$  un cercle trigonométrique et  $\left(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}\right)$  un repère orthonormé direct lié avec  $(C)$ .

- Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacun des points suivants :

$$A\left(\frac{267\pi}{6}\right) ; B\left(\frac{-238\pi}{3}\right) ; C\left(\frac{25\pi}{4}\right)$$

- Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}}\right) ; \left(\widehat{\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OA}}\right) ; \left(\widehat{\overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}}\right)$$

- Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans le cercle trigonométrique  $(C)$ .

### 6-2/ Exercice 2

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- Exprimer en fonction de  $\sin x$  et  $\cos x$  :

$$A(x) = \sin(-x) + \cos(-x) + \sin(\pi + x) + \cos(\pi - x)$$

$$B(x) = \cos(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$$

$$C(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(x - 3\pi) - \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$$

2. Calculer  $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ ,  $B\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$  et  $C\left(\frac{2017\pi}{6}\right)$ .

### 6-3/ Exercice 3

1. Résoudre dans l'intervalle  $I$  les inéquations suivantes :

$$(I_1) : 2 \sin x - 1 \geq 0 ; I = [0, 2\pi]$$

$$(I_2) : \sqrt{2} \cos x + 1 > 0 ; I = ]-\pi, \pi]$$

$$(I_3) : 2 \sin x - \sqrt{3} \leq 0 ; I = [0, 2\pi]$$

$$(I_4) : 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geq 0 ; I = [0, 2\pi]$$

### 6-4/ Exercice 4

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$A(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

1. Montrer que :  $A(x) = 2 \cos(x)$
2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $A(x) = \sqrt{2}$
3. Résoudre dans l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$  l'inéquation :  $A(x) < \sqrt{2}$