Mathématiques : Tronc Commun

Séance 8 (Équations, inéquations et systèmes)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Rappels

1-1/ Équations du 1er degré à une inconnue

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$; $(a \neq 0)$.

Toute équation dont l'écriture se ramène sous la forme suivante $ax + b = 0$ avec $x \in \mathbb{R}$ est appelée équation du 1er degré d'un seul inconnu x de et ses coefficients réels sont a et b.

Exemple

1-2/ Inéquations du 1er degré à une inconnue

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$; $(a \neq 0)$.

Toute inéquation dont l'écriture se ramène sous la forme suivante $ax + b \geq 0$ ou $ax + b \leq 0$ $ax + b > 0$ ou $ax + b < 0$ est appelée inéquation du 1er degré d'un seul inconnu x.

Signe du binôme du 1er degré $ax + b$

Cas $a > 0$	x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
	ax+b		−	0	+	

Cas $a < 0$	x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
	ax+b		−	0	+	

Exemple

II- Équations du second degré à une inconnue

2-1/ Définition

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$; $(a \neq 0)$.

Toute équation dont l'écriture se ramène sous la forme suivante $ax^2 + bx + c = 0$ avec $x \in \mathbb{R}$est appelée équation du 2ème degré d'un seul inconnu x de et ses coefficients réels sont a et b et c.

2-2/ Forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

L' écriture $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ est appelée la forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$, noté par Δ, et on écrit $\Delta = b^2 - 4ac$.

La forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ s'écrit :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

d'où :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

2-3/ Détermination des solutions de l'équation $ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

Soit l'équation $ax^2+bx+c=0$, et son discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions distinctes (ou deux racines distinctes) dans $\mathbb{R}$: $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta=0$, l'équation admet une solution (solution double) dans $\mathbb{R}$: $x_0=-\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta<0$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$: $S=\emptyset$.

2-4/ La somme et le produit des racines de l'équation $ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

Si l'équation admet deux racines distinctes x_1 et x_2, alors on a :

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad \text{et} \quad x_1\times x_2=\frac{c}{a}$$

2-5/ Factorisation et signe du trinôme de second degré $ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

Factorisation du trinôme de second degré $ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

Δ est le discriminant de l'équation $x\in\mathbb{R}/ax^2+bx+c$.

- Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2, on a $ax^2+bx+c\ =a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$.

- Si $\Delta=0$, l'équation admet une solution $x_1=-\frac{b}{a}$, on a $ax^2+bx+c\ =a(x-x_1)^2$

- Si $\Delta<0$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, on ne peut pas factoriser ax^2+bx+c sous forme de produit de deux polynômes de 1er degré (deux monômes).

Exemple

2-5/ Factorisation et signe du trinôme de second degré $ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

Signe du trinôme de second degré $ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

Δ est le discriminant de l'équation $x\in\mathbb{R}/ax^2+bx+c$.

- Si $\Delta>0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Sgn. de a	0	Sgn. de $-a$	0	Sgn; de a	

- Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

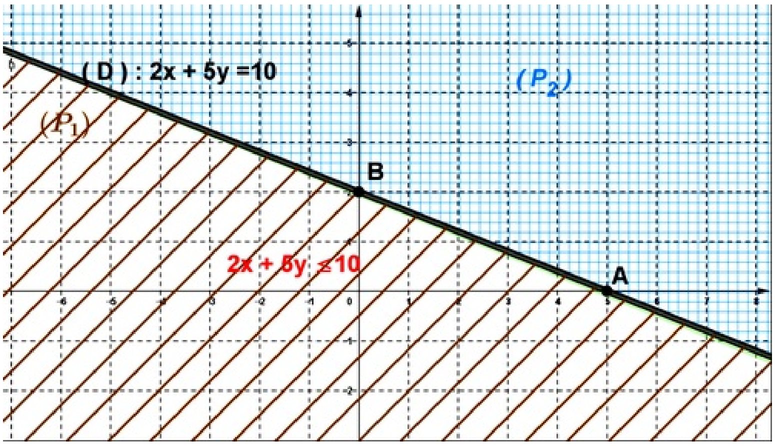
- Si $\Delta < 0$: le trinôme n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$, on ne peut pas factoriser $ax^2 + bx + c$, et son signe est celui de a pour tout x de $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	

Exemple

III- Équations et inéquations du 1er degré à deux inconnues (Méthode graphique)

Méthode



IV- Déterminants d'un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues

4-1/ Définition

On considère le système suivant : $(S)\ :\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

Le nombre $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ est appelé le déterminant du système (S).

Le nombre $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$ est appelé le déterminant pour déterminer x.

Le nombre $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$ est appelé le déterminant pour déterminer y.

Exemple

4-2/ Propriétés

1. Cas 1 : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$

Le système est appelé système de Cramer, le système admet une solution unique : $S = \left\{ \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \right\}$

2. Cas 2 : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0$

- Si $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$, le système n'a pas de solution, d'où $S = \emptyset$.

- Si $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$, le système se ramène a une seule équation, on prend une par exemple $(S)\ :\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = c$, le système a une infinité de solutions, d'où ($S = \left\{ (x, y) / y = -\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}, x \in \mathbb{R} \right\}$

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1\ \frac{2x+3}{x-2} = 0$$
$$2\ \frac{x-3}{9x+6} = 1$$
$$3\ \frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+1} = 0$$
$$4\ \frac{2}{x+3} = \frac{x-3}{2}$$
$$5\ \frac{x+1}{5x-7} = \frac{5x+7}{x-1}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$1\ \left(1 - \sqrt{2}\right)x - 5 \leq 0$$
$$2\ 3x - 5 < 7 - \sqrt{2}x$$
$$3\ \frac{7x-2}{1-\sqrt{3}} \leq \frac{7x+2}{1+\sqrt{3}}$$
$$4\ |x - 5| < \frac{1}{2}$$
$$5\ |x + 2| - 5 \leq 4$$
$$6\ |3x - 2| > 3$$

5-2/ Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1\ \ x^2+x+1=0$$
$$2\ \ 3x^2+3\sqrt{2}x+2=0$$
$$3\ \ x^2-x-12=0$$
$$4\ \ 3x^2+5x+1=0$$
$$5\ \ 4x^2-3x+1=0$$
$$6\ \ x^2-x+\frac{1}{4}=0$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$1\ \ x^2-5x+6\leq 0$$
$$2\ \ -x^2+x+6>0$$
$$3\ \ \left(x^2-5x+6\right)\left(-x^2+x+6\right)\leq 0$$
$$4\ \ \frac{x^2-6x+5}{x^2-4}\geq 0$$
$$5\ \ \left(x^2+3x+2\right)\left(-x^2+5x-6\right)\leq 0$$

5-3/ Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$1\quad (S_1) : \begin{cases} 5x-2y=1 \\ -10x+4y=3 \end{cases}$$
$$2\quad (S_2) : \begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x-y=8 \end{cases}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} -x+3y=4 \\ x-2y=11 \end{cases}$$

3. Déduire les solutions des systèmes suivants :

$$1\quad (S_1) : \begin{cases} -\sqrt{x}+\frac{3}{y}=4 \\ \sqrt{x}-\frac{2}{y}=11 \end{cases}$$
$$2\quad (S_2) : \begin{cases} -\left|x+1\right|+3y^2=4 \\ \left|x+1\right|-2y^2=11 \end{cases}$$

5-4/ Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2x^2-2x-4=0$
2. Déduire les solutions de l'équation suivante : $2x^4-2x^2-4=0$

On considère l'équation suivante : $(E)\ :\ x^2+x-6=0$

3. Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distincts α et β sans les calculer.
4. Calculer $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$, $\alpha\beta^2+\alpha^2\beta$
5. Factoriser, si possible, les polynômes suivants :

$$P(x) = x^2 - x - 6$$
$$Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$$
$$S(x) = x^2 + 3x + 5$$