AlloSchool

Mathématiques : Tronc Commun

Séance 8 (Équations, inéquations et systèmes)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Rappels

1-1/ Équations du 1er degré à une inconnue

1-2/ Inéquations du 1er degré à une inconnue

II- Équations du second degré à une inconnue

2-1/ Définition

2-2/ Forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

2-3/ Détermination des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

2-4/ La somme et le produit des racines de l'équation $ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

2-5/ Factorisation et signe du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

III- Équations et inéquations du 1er degré à deux inconnues (Méthode graphique)

IV- Déterminants d'un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues

4-1/ Définition

4-2/ Propriétés

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

5-2/ Exercice 2

5-3/ Exercice 3

5-4/ Exercice 4

I- Rappels

1-1/ Équations du 1er degré à une inconnue

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$; $(a \neq 0)$.

Toute équation dont l'écriture se ramène sous la forme suivante $ax + b = 0$ avec $x \in \mathbb{R}$ est appelée équation du 1er degré d'un seul inconnu x de et ses coefficients réels sont a et b.

Exemple

1-2/ Inéquations du 1er degré à une inconnue

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$; $(a \neq 0)$.

Toute inéquation dont l'écriture se ramène sous la forme suivante $ax + b \geq 0$ ou $ax + b \leq 0$ $ax + b > 0$ ou $ax + b < 0$ est appelée inéquation du 1er degré d'un seul inconnu x.

Signe du binôme du 1er degré $ax + b$

Cas a > 0	x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
	ax+b	−	0	+

Cas a < 0	x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
	ax+b	+	0	−

Exemple

II- Équations du second degré à une inconnue

2-1/ Définition

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$; $(a \neq 0)$.

Toute équation dont l'écriture se ramène sous la forme suivante $ax^2 + bx + c = 0$ avec $x \in \mathbb{R}$ est appelée équation du 2ème degré d'un seul inconnu x de et ses coefficients réels sont a et b et c.

2-2/ Forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

L' écriture $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ est appelée la forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$, noté par Δ, et on écrit $\Delta = b^2 - 4ac$.

La forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ s'écrit :

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

d'où :

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

2-3/ Détermination des solutions de l'équation $ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

Soit l'équation $ax^2+bx+c=0$, et son discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions distinctes (ou deux racines distinctes) dans $\mathbb{R}$: $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta=0$, l'équation admet une solution (solution double) dans $\mathbb{R}$: $x_0=-\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta<0$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$: $S=\emptyset$.

2-4/ La somme et le produit des racines de l'équation $ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

Si l'équation admet deux racines distinctes x_1 et x_2, alors on a :

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1\times x_2=\frac{c}{a}$$

2-5/ Factorisation et signe du trinôme de second degré $ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

Factorisation du trinôme de second degré $ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

Δ est le discriminant de l'équation $x\in\mathbb{R}/ax^2+bx+c$.

- Si $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2, on a $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

- Si $\Delta=0$, l'équation admet une solution $x_1=-\frac{b}{a}$, on a $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$

- Si $\Delta<0$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, on ne peut pas factoriser ax^2+bx+c sous forme de produit de deux polynômes de 1er degré (deux monômes).

Exemple

2-5/ Factorisation et signe du trinôme de second degré $ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

Signe du trinôme de second degré $ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$

Δ est le discriminant de l'équation $x\in\mathbb{R}/ax^2+bx+c$.

- Si $\Delta>0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	Sgn. de a	0	Sgn. de $-a$	0	Sgn; de a		

- Si $\Delta=0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a		

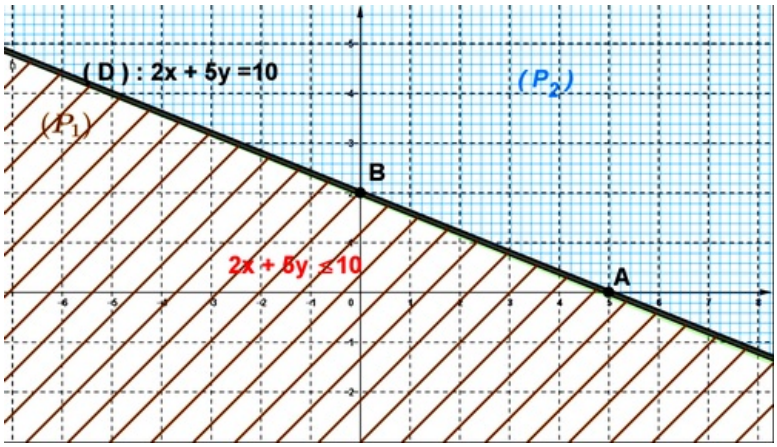
- Si $\Delta<0$: le trinôme n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$, on ne peut pas factoriser ax^2+bx+c , et son signe est celui de a pour tout x de $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	

Exemple

III- Équations et inéquations du 1er degré à deux inconnues (Méthode graphique)

Méthode



IV- Déterminants d'un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues

4-1/ Définition

On considère le système suivant : (S) : $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ / $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

Le nombre $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ est appelé le déterminant du système (S).

Le nombre $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$ est appelé le déterminant pour déterminer x.

Le nombre $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$ est appelé le déterminant pour déterminer y.

Exemple

4-2/ Propriétés

1. Cas 1 : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$

Le système est appelé système de Cramer, le système admet une solution unique :
$S = \left\{ \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \right\}$

2. Cas 2 : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0$

- Si $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$, le système n'a pas de solution, d'où $S = \emptyset$.

- Si $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$, le système se ramène a une seule équation, on prend une par exemple (S) : $(x,y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = c$, le système a une infinité de solutions, d'où ($S = \left\{(x,y)/y = -\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}, x \in \mathbb{R}\right\}$

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1 \ \frac{2x+3}{x-2} = 0$$
$$2 \ \frac{x-3}{9x+6} = 1$$
$$3 \ \frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+1} = 0$$
$$4 \ \frac{2}{x+3} = \frac{x-3}{2}$$
$$5 \ \frac{x+1}{5x-7} = \frac{5x+7}{x-1}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$1 \ \left(1-\sqrt{2}\right)x - 5 \leq 0$$
$$2 \ 3x - 5 < 7 - \sqrt{2}x$$
$$3 \ \frac{7x-2}{1-\sqrt{3}} \leq \frac{7x+2}{1+\sqrt{3}}$$
$$4 \ |x-5| < \frac{1}{2}$$
$$5 \ |x+2| - 5 \leq 4$$
$$6 \ |3x-2| > 3$$

5-2/ Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1 \ x^2 + x + 1 = 0$$
$$2 \ 3x^2 + 3\sqrt{2}x + 2 = 0$$
$$3 \ x^2 - x - 12 = 0$$
$$4 \ 3x^2 + 5x + 1 = 0$$
$$5 \ 4x^2 - 3x + 1 = 0$$
$$6 \ x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$1 \ x^2 - 5x + 6 \leq 0$$
$$2 \ -x^2 + x + 6 > 0$$
$$3 \ \left(x^2 - 5x + 6\right)\left(-x^2 + x + 6\right) \leq 0$$
$$4 \ \frac{x^2-6x+5}{x^2-4} \geq 0$$
$$5 \ \left(x^2 + 3x + 2\right)\left(-x^2 + 5x - 6\right) \leq 0$$

5-3/ Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$1 \quad (S_1): \begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ -10x + 4y = 3 \end{cases}$$
$$2 \quad (S_2): \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :
$$(S): \begin{cases} -x + 3y = 4 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$
3. Déduire les solutions des systèmes suivants :
$$1 \quad (S_1): \begin{cases} -\sqrt{x} + \frac{3}{y} = 4 \\ \sqrt{x} - \frac{2}{y} = 11 \end{cases}$$
$$2 \quad (S_2): \begin{cases} -|x+1| + 3y^2 = 4 \\ |x+1| - 2y^2 = 11 \end{cases}$$

5-4/ Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2x^2 - 2x - 4 = 0$
2. Déduire les solutions de l'équation suivante : $2x^4 - 2x^2 - 4 = 0$

On considère l'équation suivante : (E) : $x^2 + x - 6 = 0$

3. Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distincts α et β sans les calculer.
4. Calculer $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, $\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta$
5. Factoriser, si possible, les polynômes suivants :
$$P(x) = x^2 - x - 6$$
$$Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$$
$$S(x) = x^2 + 3x + 5$$