



Mathématiques : Tronc Commun

Séance 3 (Calcul vectoriel dans le plan)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Rappel (Vecteurs du plan)

II- Opérations dans l'ensemble des vecteurs du plan (P)

2-1/ Somme de deux vecteurs

2-2/ Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

III- Vecteurs colinéaires

IV- Milieu d'un segment

4-1/ Milieu d'un segment

4-2/ Milieux d'un triangle

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

5-2/ Exercice 2

5-3/ Exercice 3

5-4/ Exercice 4

I- Rappel (Vecteurs du plan)

- A et B deux points distincts du plan (P).

+ La direction de $\overrightarrow{AB}$ est la droite (AB) .

+ Le sens de $\overrightarrow{AB}$ est celui de la demi droite $[AB)$.

+ La longueur ou norme de $\overrightarrow{AB}$, notée $\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = AB$, est la distance de A à B .

- Cas particulier si $(A = B)$: alors Le vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ c'est le vecteur nul.

- Deux vecteurs non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même direction et même sens et même longueur.

- $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

II- Opérations dans l'ensemble des vecteurs du plan (P)

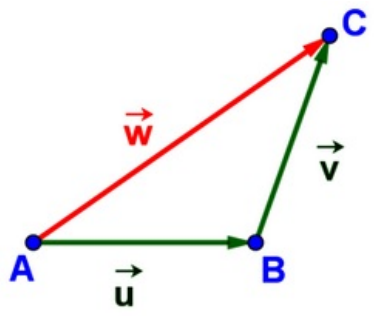
2-1/ Somme de deux vecteurs

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan (P).

La somme des vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ est le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

On écrit : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.



Propriétés

- quelque soit $A, B, C \in (P)$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est appelé relation de Chasles.

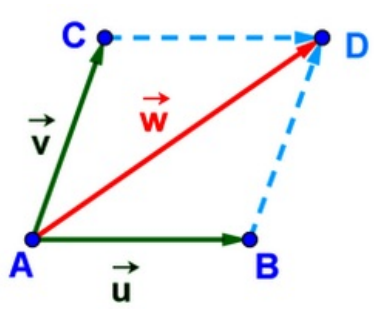
Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (qui a la même direction, la même norme (longueur) de $\overrightarrow{AB}$ mais de sens contraire de $\overrightarrow{AB}$) et on a $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Règle du parallélogramme

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan (P).

$ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si le point D vérifie

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ou bien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



2-2/ Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre non nul.

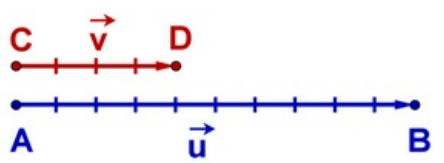
Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un réel k (ou un scalaire) est le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$ qui vérifie :

1- $\vec{v}$ a la direction parallèle à la direction du vecteur $\vec{u}$.

2- $\vec{v}$ a pour sens :

- Celui de $\vec{u}$ si $k > 0$.
- Contraire de $\vec{u}$ si $k < 0$.

3- $\vec{v}$ de norme (longueur) égale à la norme (longueur) de $\vec{u}$ multipliée par $|k|$,
ou encore : $\|\vec{v}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.



Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels k et k' , on a :

$$(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$$

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

$$k.(k'.\vec{u}) = k'.(k.\vec{u}) = (k.k')\vec{u}$$

$$1.\vec{u} = \vec{u}$$

$$k.\vec{u} = \vec{0} \text{ alors } (k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$$

III- Vecteurs colinéaires

Définition

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.

- Trois points A et B et C du plan (P) sont alignés si et seulement si $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$ sont alignés (ou encore il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{AB} = \alpha\vec{AC}$ ou $\vec{AC} = \alpha\vec{AB}$).

- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont alignés (ou encore il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{AB} = \alpha\vec{CD}$ ou $\vec{CD} = \alpha\vec{AB}$).

Exemple

IV- Milieu d'un segment

4-1/ Milieu d'un segment

Définition

$[AB]$ est un segment du plan (P) .

Le point I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Propriétés

- Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BI}$.
- Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.
- Soit le point I est le milieu du segment $[AB]$ et soit M un point du plan on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

soit ABCD un parallélogramme

1. Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$
2. Montrer que $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{NM} = \frac{9}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
3. En déduire que M, N et C sont alignés

5-2/ Exercice 2

soit ABC un triangle et I le milieu de segment $[AB]$ et J le milieu de segment $[AC]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Soit M et N deux points du plan tels que $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BJ}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CI}$.

2. Quelle la nature de $ACBN$ et $ABCM$?
3. Montrer que A, M et N sont alignés.

5-3/ Exercice 3

soit A, B, C et M quatre points du plan et $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

1. Montrer que $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
2. soit $\vec{v} = 2\overrightarrow{BA} - 6\overrightarrow{BC}$. Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

5-4/ Exercice 4

soit ABCD un parallélogramme et M et N deux points du plan tels que

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$$

1. Construire une figure convenable.
2. Montrer que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$
3. En déduire que M,N et C sont alignés.
4. soit E le milieu du $[DN]$ et F le point du plan tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BF}$. Montrer que C est le milieu du $[EF]$
5. Montrer que $(BD) \parallel (EF)$.