AlloSchool

Mathématiques : Tronc Commun

Séance 9 (Trigonométrie 1 - Règles du calcul trigonométrique)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

I- Cercle trigonométrique

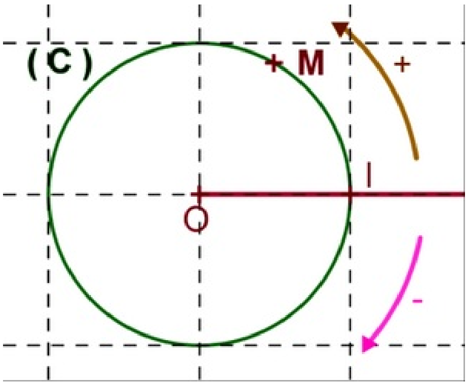
1-1/ Définition :

Tout cercle (C) du plan (P) tel que :

- que son rayon est $r = 1$.
- qui est muni d'un origine I.
- qui est orienté positif (qui est le sens contraire de la rotation des aiguilles du montre).

Ce cercle (C) est appelé cercle trigonométrique.

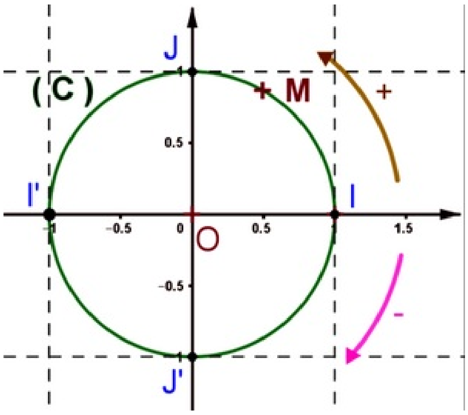
Si tous les cercles du plan sont orientés d'une orientation positive, on dit que le plan est orienté positif (ou direct).



1-2/ Remarque

Si le plan est rapporté a un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ et O est le centre du cercle (C) et le point J est placé dans le sens positif, on dit que le cercle trigonométrique (C) est lié au repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right) = \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ (avec $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$).

Pour tout le cours : le cercle (C) est le cercle trigonométrique d'origine I et son centre est le point O.



I- Cercle trigonométrique

1-3/ Abscisses curvilignes

$M_{(\alpha+2k\pi)}$ est un point de (C), il existe un et un seul abscisse curviligne de M qui appartienne à $]-\pi, \pi]$ (c.à.d. $-\pi < \alpha \leq \pi$). Cet abscisse est appelé abscisse curviligne principal de M.

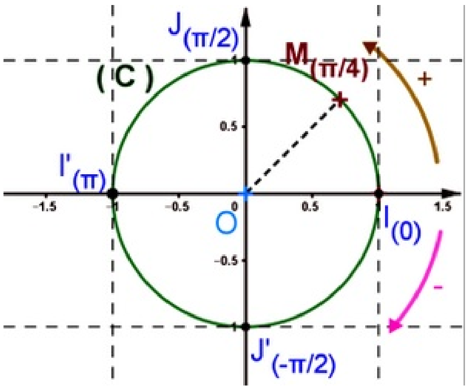
Si M est situé sur le demi cercle «supérieure», la mesure principale appartienne à $[0, \pi]$, sinon la mesure principale appartienne à $]-\pi, 0]$.

Les abscisses curvilignes de I sont $0 + 2k\pi = 2\text{k}\pi$, donc l'abscisse curviligne principale de I est .

Les abscisses curvilignes de J sont $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, donc l'abscisse curviligne principale de J est $\frac{\pi}{2}$.

Les abscisses curvilignes de I' sont $\pi + 2k\pi$, donc l'abscisse curviligne principale de I' est π.

Les abscisses curvilignes de J' sont $\frac{-\pi}{2} + 2k\pi$, donc l'abscisse curviligne principale de J' est $\frac{-\pi}{2}$.



II- Angle orienté de deux demi-droites – de deux vecteurs non nuls

2-1/ Radian – grade

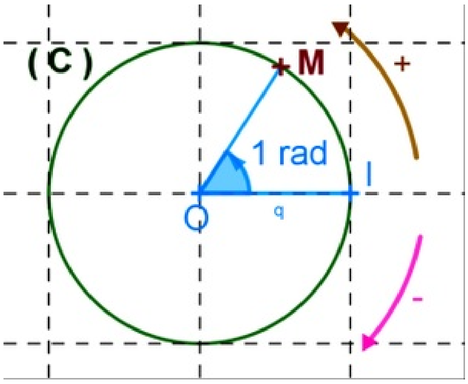
Définition

A et B deux points du cercle trigonométrique (C) d'origine I et son centre est le point O et M un point de (C) .

- La longueur de l'arc géométrique IM intercepte par l'angle géométrique IOM est la mesure de IOM en radian et se note rad ou rd.

- la mesure d'un angle plat en radian est égale à $180^\circ = \pi rad$

- la mesure d'un angle droit en radian est égale à $90^\circ = \frac{\pi}{2} rad$



Remarque

Il existe une autre unité de mesure des angles, on l'appelle grade

On la note par gr tel que $180^\circ = \pi rad = 200gr$ et $90^\circ = \frac{\pi}{2} rad = 100gr$

Si la mesure d'un angle est x et y et z respectivement en degré et radian et grade, alors $\frac{x}{180} = \frac{y}{\pi} = \frac{z}{200}$.

Exemple

2-2/ Mesure d'un angle orienté de deux demi-droites

Définition 1

Soit $[OA)$ et $[OB)$ deux demi droites du plan (P) tel que $A \neq O$ et $B \neq O$.

Le couple $([OA), [OB))$ est appelé l'angle orienté du demi-droites, on le note (OA, OB).

Le couple $([OB), [OA))$ détermine un autre angle orienté, on le note (OB, OA) qui est différent de l'angle (OA, OB).

Définition 2

On considère dans le plan (P) deux points A et B puis le cercle trigonométrique (C) de centre O tel que $A \neq O$ et $B \neq O$.

Les deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ coupent respectivement en $A'_{(\alpha)}$ et $B'_{(\beta)}$ tel que leurs abscisses curvilignes sont α et β. On a :

- Les mesures de l'angle orienté (OA, OB) sont les nombres réels $\beta - \alpha + 2k\pi \ (\mathrm{k} \in \mathbb{Z})$,

On note $(\overline{OA, OB}) \equiv \beta - \alpha \ [2\pi]$ ou encore $(\overline{OA, OB}) = \beta - \alpha + 2k\pi \ (\mathrm{k} \in \mathbb{Z})$.

On lit : mesures de l'angle orienté (OA, OB) congrue à $\beta - \alpha$ modulo 2π.

- La mesure qui vérifie $(\beta - \alpha + 2\mathrm{k}\pi) \in]-\pi, \pi]$ s'appelle la mesure principale de l'angle orienté (OA, OB).

Exemple

Propriété

Le plan (P) est orienté positif, O est un point de (P).

Soient $[OA)$ et $[OB)$ et $[OC)$ trois demi-droites de (P).

On a :

$\left(\overline{OA, OA}\right) \equiv 0 \ [2\pi]$

$\left(\overline{OA, OB}\right) \equiv -\left(\overline{OB, OA}\right) \ [2\pi]$

$\left(\overline{OA, OB}\right) + \left(\overline{OB, OC}\right) \ \equiv \left(\overline{OA, OC}\right) \ [2\pi]$: Relation de chasles

Exemple

2-3/ Angle déterminé par deux vecteurs non nuls

Définition

Le plan (P) est orienté positif, O est un point de (P).

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de (P).

Soient A et B deux points de (P) tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.

L'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est l'angle orienté (OA, OB) (c.à.d. des deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$, on le note $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Les mesures de l'angle orienté (OA, OB) sont appelées les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on note $\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$.

On a : $\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv \left(\overline{OA, OB}\right) \ \ [2\pi]$

La mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ qui appartienne à $]-\pi, \pi]$ est appelée la mesure principale de $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

Exemple

Propriété

Le plan (P) est orienté positif, O est un point de (P).

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs non nuls de (P).

On a :

$\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}}\right) \equiv 0 \ [2\pi]$

$\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv -\left(\overline{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}\right) \ [2\pi]$

$$\left(\overrightarrow{\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v}}\right)+\left(\overrightarrow{\overrightarrow{v}\,,\overrightarrow{w}}\right)\equiv\left(\overrightarrow{\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{w}}\right)\ [2\pi]$$

Exemple

III- Lignes trigonométriques du réel x

Définition

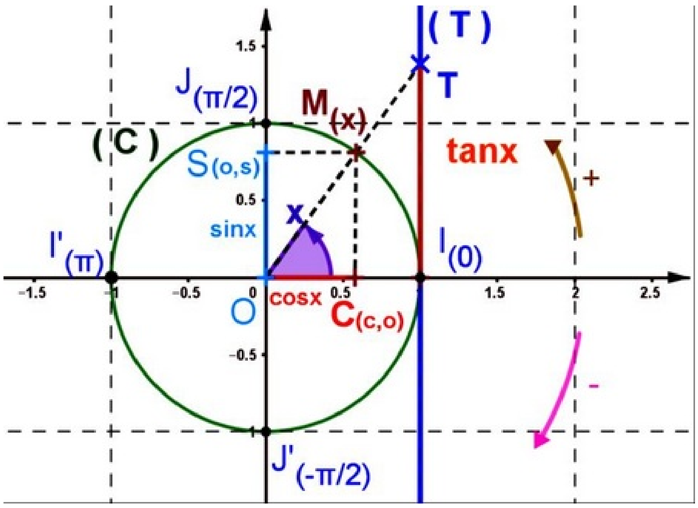
x est une abscisse curviligne du point $M_{(x)}\in(C)$ tel que (C) est le cercle trigonométrique d'origine I lié au repère orthonormé.

$M\,(c,s)$ par rapport au repère orthonormé direct.

Le réel c (abscisse de M) est appelé le sinus du réel x, on le note $\cos x$, d'où $\cos x=\cos\left(\overrightarrow{\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{OM}}\right)=c.$

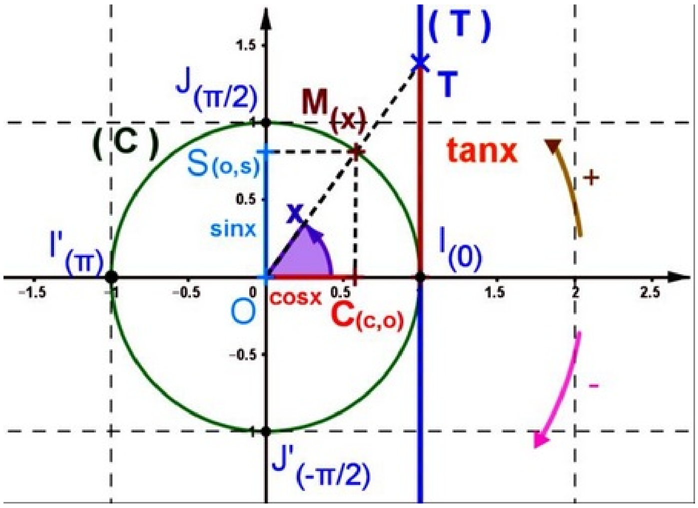
Le réel s (ordonnée de M) est appelé le cosinus du réel x, on le note $\sin x$, d'où $\sin x=\sin\left(\overrightarrow{\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{OM}}\right)=s.$

Le réel t (abscisse du point T) est appelé la tangente du réel x, on le note $\tan x$, d'où $\tan x=\tan\left(\overrightarrow{\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{OM}}\right)=t$ (sachant la droite (T) est tangente au cercle (C) en I et $(T)\cap[OM)=\{T\}$).



Conséquences

$(\forall x\in\mathbb{R})\ :\ (\sin x)^2+(\cos x)^2=1$
$(\forall x\in\mathbb{R})\ :\ -1\leq\sin x\leq 1\ et\ -1\leq\cos x\leq 1$
$(\forall x\in\mathbb{R})\ :\ \cos(x+2k\pi)=\cos x$
$(\forall x\in\mathbb{R})\ :\ \sin(x+2k\pi)=\sin x$
$\left(\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\mathrm{k}\in\mathbb{Z}\right\}\right)\ :\ \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\ et\ 1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$



IV- Signe de $\sin x$ et $\cos x$ et $\tan x$

4-1/ Quadrant d'un cercle

On divise le cercle en quatre arcs de même longueur suivant le sens positif.

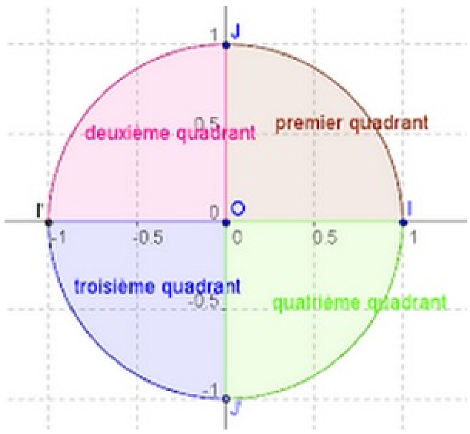
x est une abscisse curviligne du point $M_{(x)} \in (C)$.

Le 1er arc IJ : si $M_{(x)} \in IJ$ on dit que $M_{(x)}$ est situé dans le premier quadrant.

Le 2ème arc JI' : si $M_{(x)} \in JI'$ on dit que $M_{(x)}$ est situé dans le deuxième quadrant.

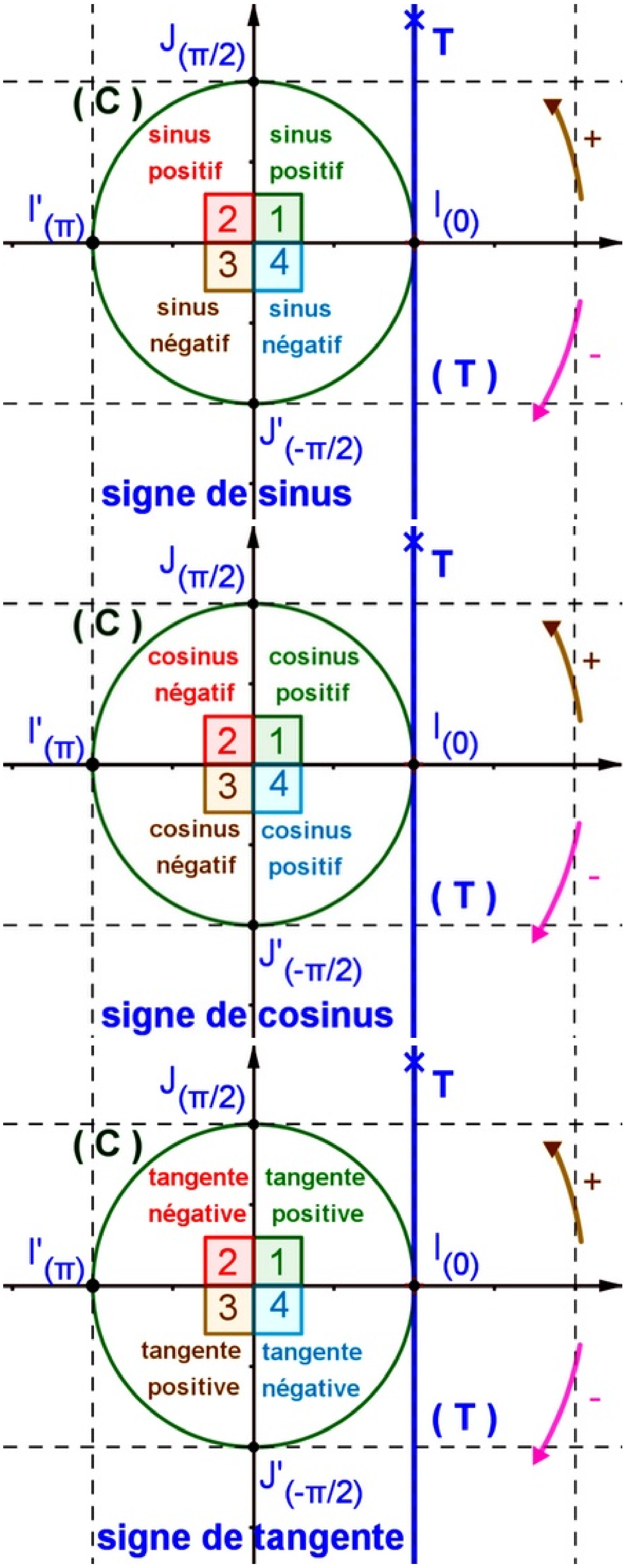
Le 3ème arc $I'J'$: si $M_{(x)} \in I'J'$ on dit que $M_{(x)}$ est situé dans le troisième quadrant.

Le 4ème arc $J'I$: si $M_{(x)} \in J'I$ on dit que $M_{(x)}$ est situé dans le quatrième quadrant



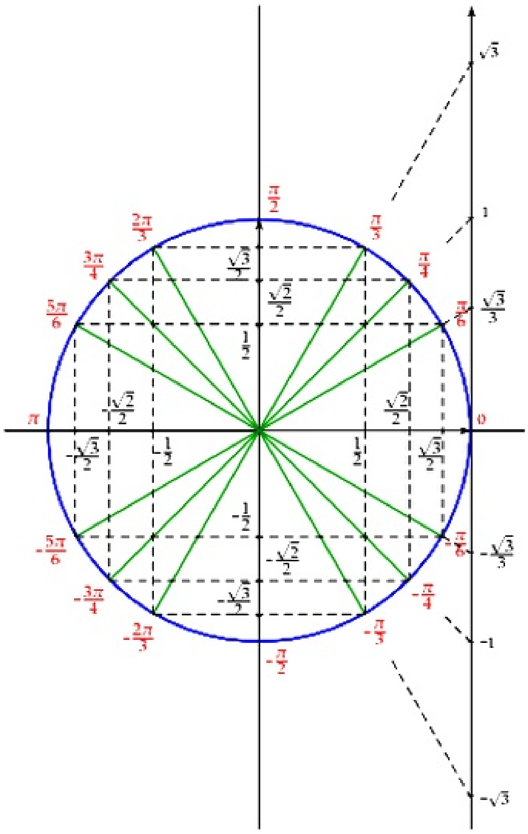
4-2/ Signes des lignes trigonométriques

est situé au $M_{(x)}$	Quadrant n° 1	Quadrant n° 2	Quadrant n° 3	Quadrant n° 4
$\sin x$	+	+	−	−
$\cos x$	+	−	−	+
$\tan x$	+	−	+	−



4-3/ Angles remarquables

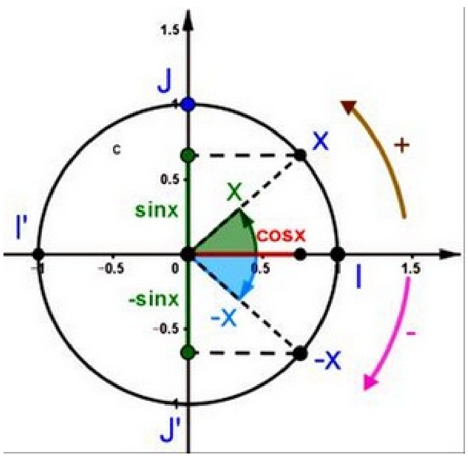
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



V- Relations entre les angles

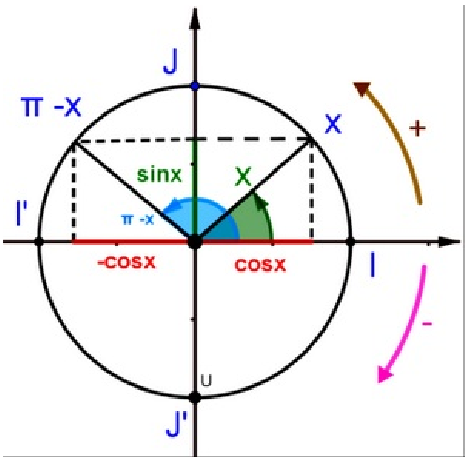
5-1/ Angles opposés

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\tan(-x) = -\tan x$$



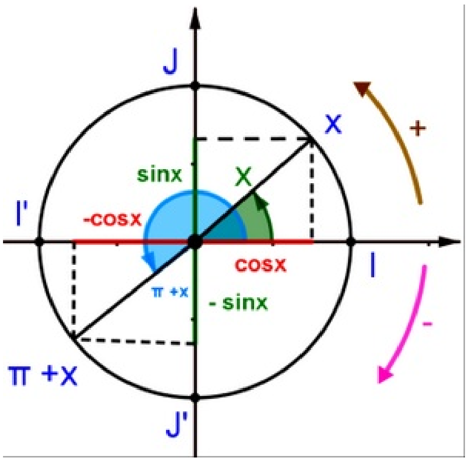
5-2/ Angles supplémentaires

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$



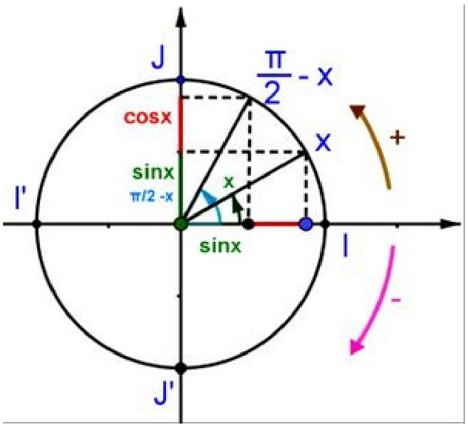
5-3/ Angles opposés supplémentaires

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\tan(\pi + x) = -\tan x$$



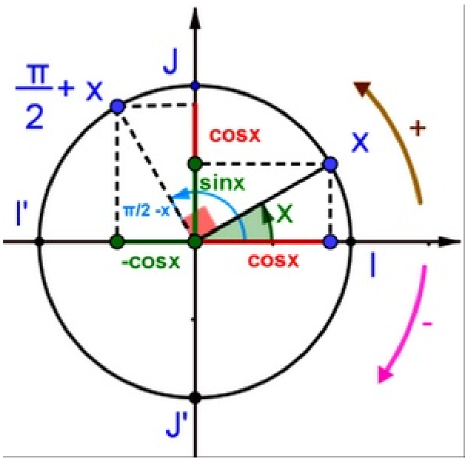
5-4/ Angles complémentaires

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$



5-5/ Angles opposés complémentaires

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{-1}{\tan x}$$



5-6/ Résumé des formules précédentes

	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
sin ↗	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
cos ↗	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
tan ↗	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

Soit (C) un cercle trigonométrique et $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$ un repère orthonormé direct lié avec (C).

1. Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacun des points suivants :

$$A\left(\frac{267\pi}{6}\right)\ ;\ B\left(\frac{-238\pi}{3}\right)\ ;\ C\left(\frac{25\pi}{4}\right)$$

2. Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right)\ ;\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}}\right)\ ;\ \left(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}}\right)$$

3. Placer les points A, B et C dans le cercle trigonométrique (C).

6-2/ Exercice 2

Soit $x\in\mathbb{R}$.

1. Exprimer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:

$$A\left(x\right)=\sin\left(-x\right)+\cos\left(-x\right)+\sin\left(\pi+\mathrm{x}\right)+\cos\left(\pi-\mathrm{x}\right)$$
$$B\left(x\right)=\cos\left(\pi+\mathrm{x}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{x}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+\mathrm{x}\right)$$
$$C\left(x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{x}\right)+\cos\left(x-3\pi\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\mathrm{x}\right)$$

2. Calculer $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $B\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$ et $C\left(\frac{2017\pi}{6}\right)$.

6-3/ Exercice 3

1. Résoudre dans l'intervalle I les inéquations suivantes :

$$(I_1)\ :\ 2\sin x-1\geq 0\ ;\ I=[0,2\pi]$$
$$(I_2)\ :\sqrt{2}\cos x+1>0\ \ ;\ I=\left]-\pi,\pi\right]$$
$$(I_3)\ :2\sin x-\sqrt{3}\leq 0\ \ ;\ I=[0,2\pi]$$
$$(I_4)\ :\ 2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\geq 0\ ;\ I=[0,2\pi]$$

6-4/ Exercice 4

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose :

$$A\left(x\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

1. Montrer que : $A\left(x\right)=2\cos\left(x\right)$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $A\left(x\right)=\sqrt{2}$
3. Résoudre dans l'intervalle $\left[0\ ;\ 2\pi\right]$ l'inéquation : $A\left(x\right)<\sqrt{2}$