

Sommaire**I- Rappels**

1-1/ Équations du 1er degré à une inconnue

1-2/ Inéquations du 1er degré à une inconnue

II- Équations du second degré à une inconnue

2-1/ Définition

2-2/ Forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)2-3/ Détermination des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

2-4/ La somme et le produit des racines de l'équation

 $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

2-5/ Factorisation et signe du trinôme de second degré

 $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)**III- Équations et inéquations du 1er degré à deux inconnues**

(Méthode graphique)

IV- Déterminants d'un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues

4-1/ Définition

4-2/ Propriétés

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

5-2/ Exercice 2

5-3/ Exercice 3

5-4/ Exercice 4

I- Rappels

1-1/ Équations du 1er degré à une inconnue

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$; ($a \neq 0$).

Toute équation dont l'écriture se ramène sous la forme suivante $ax + b = 0$ avec $x \in \mathbb{R}$ est appelée équation du 1er degré d'un seul inconnu x de et ses coefficients réels sont a et b .

Exemple

1-2/ Inéquations du 1er degré à une inconnue

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$; ($a \neq 0$).

Toute inéquation dont l'écriture se ramène sous la forme suivante $ax + b \geq 0$ ou $ax + b \leq 0$ $ax + b > 0$ ou $ax + b < 0$ est appelée inéquation du 1er degré d'un seul inconnu x .

Signe du binôme du 1er degré $ax + b$

Cas $a > 0$	x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
	$ax+b$	-	0	+
Cas $a < 0$	x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
	$ax+b$	-	0	+

Exemple

II- Équations du second degré à une inconnue

2-1/ Définition

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$; ($a \neq 0$).

Toute équation dont l'écriture se ramène sous la forme suivante $ax^2 + bx + c = 0$ avec $x \in \mathbb{R}$ est appelée équation du 2ème degré d'un seul inconnu x de et ses coefficients réels sont a et b et c .

2-2/ Forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

L'écriture $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ est appelée la forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$, noté par Δ , et on écrit $\Delta = b^2 - 4ac$.

La forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ s'écrit :

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

d'où :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

2-3/ Détermination des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Soit l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes (ou deux racines distinctes) dans \mathbb{R} : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution (solution double) dans \mathbb{R} : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution dans \mathbb{R} : $S = \emptyset$.

2-4/ La somme et le produit des racines de l'équation $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Si l'équation admet deux racines distinctes x_1 et x_2 , alors on a :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

2-5/ Factorisation et signe du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Factorisation du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Δ est le discriminant de l'équation $x \in \mathbb{R}/ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 , on a $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution $x_1 = -\frac{b}{2a}$, on a $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution dans \mathbb{R} , on ne peut pas factoriser $ax^2 + bx + c$ sous forme de produit de deux polynômes de 1er degré (deux monômes).

Exemple

2-5/ Factorisation et signe du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Signe du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Δ est le discriminant de l'équation $x \in \mathbb{R}/ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$				
$f(x)$	Sgn. de a		0	Sgn. de $-a$		0	Sgn. de a	

- Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$		
$f(x)$	Signe de a		0	Signe de a	

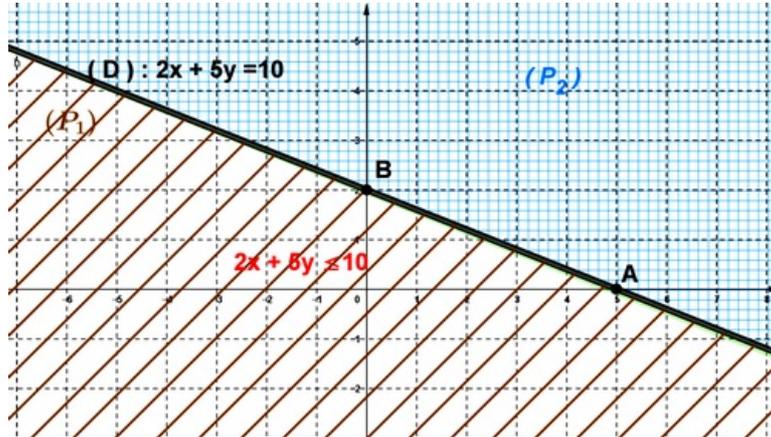
- Si $\Delta < 0$: le trinôme n'a pas de racine dans \mathbb{R} , on ne peut pas factoriser $ax^2 + bx + c$, et son signe est celui de a pour tout x de \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	

Exemple

III- Équations et inéquations du 1er degré à deux inconnues (Méthode graphique)

Méthode



IV- Déterminants d'un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues

4-1/ Définition

On considère le système suivant : $(S) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Le nombre $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ est appelé le déterminant du système (S) .

Le nombre $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$ est appelé le déterminant pour déterminer x .

Le nombre $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$ est appelé le déterminant pour déterminer y .

Exemple

4-2/ Propriétés

1. Cas 1 : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$

Le système est appelé système de Cramer, le système admet une solution unique :

$$S = \left\{ \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \right\}$$

2. Cas 2 : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0$

- Si $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$, le système n'a pas de solution, d'où $S = \emptyset$.

- Si $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$, le système se ramène à une seule équation, on prend une par exemple
 (S) : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = c$, le système a une infinité de solutions, d'où (
 $S = \left\{ (x, y) / y = -\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}, x \in \mathbb{R} \right\}$

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 1 \quad & \frac{2x+3}{x-2} = 0 \\ 2 \quad & \frac{x-3}{9x+6} = 1 \\ 3 \quad & \frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+1} = 0 \\ 4 \quad & \frac{2}{x+3} = \frac{x-3}{2} \\ 5 \quad & \frac{x+1}{5x-7} = \frac{5x+7}{x-1} \end{aligned}$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} 1 \quad & (1 - \sqrt{2})x - 5 \leq 0 \\ 2 \quad & 3x - 5 < 7 - \sqrt{2}x \\ 3 \quad & \frac{7x-2}{1-\sqrt{3}} \leq \frac{7x+2}{1+\sqrt{3}} \\ 4 \quad & |x - 5| < \frac{1}{2} \\ 5 \quad & |x + 2| - 5 \leq 4 \\ 6 \quad & |3x - 2| > 3 \end{aligned}$$

5-2/ Exercice 2

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 1 \quad & x^2 + x + 1 = 0 \\ 2 \quad & 3x^2 + 3\sqrt{2}x + 2 = 0 \\ 3 \quad & x^2 - x - 12 = 0 \\ 4 \quad & 3x^2 + 5x + 1 = 0 \\ 5 \quad & 4x^2 - 3x + 1 = 0 \\ 6 \quad & x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \end{aligned}$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$\begin{aligned} 1 \quad & x^2 - 5x + 6 \leq 0 \\ 2 \quad & -x^2 + x + 6 > 0 \\ 3 \quad & (x^2 - 5x + 6)(-x^2 + x + 6) \leq 0 \\ 4 \quad & \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 4} \geq 0 \\ 5 \quad & (x^2 + 3x + 2)(-x^2 + 5x - 6) \leq 0 \end{aligned}$$

5-3/ Exercice 3

1. Résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes suivants :

$$1 \quad (S_1) : \begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ -10x + 4y = 3 \end{cases}$$

$$2 \quad (S_2) : \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

2. Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} -x + 3y = 4 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$

3. Déduire les solutions des systèmes suivants :

$$1 \quad (S_1) : \begin{cases} -\sqrt{x} + \frac{3}{y} = 4 \\ \sqrt{x} - \frac{2}{y} = 11 \end{cases}$$

$$2 \quad (S_2) : \begin{cases} -|x+1| + 3y^2 = 4 \\ |x+1| - 2y^2 = 11 \end{cases}$$

5-4/ Exercice 4

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $2x^2 - 2x - 4 = 0$

2. Déduire les solutions de l'équation suivante : $2x^4 - 2x^2 - 4 = 0$

On considère l'équation suivante : $(E) : x^2 + x - 6 = 0$

3. Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distincts α et β sans les calculer.

4. Calculer $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, $\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta$

5. Factoriser, si possible, les polynômes suivants :

$$P(x) = x^2 - x - 6$$

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$$

$$S(x) = x^2 + 3x + 5$$