



Mathématiques : Tronc Commun

Séance 6 (La droite dans le plan)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Base d'un plan – Repère d'un plan – Coordonnées d'un point du plan

1-1/ Base d'un plan – Repère d'un plan

1-2/ Coordonnées d'un point du plan

1-3/ Coordonnées de la somme de deux vecteurs –
Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

II- Déterminant de deux vecteurs

III- Condition de colinéarité de deux vecteurs

IV- Norme d'un vecteur - Distance entre deux points

V- Vecteur directeur d'une droite

VI- Représentation paramétrique et équation cartésienne d'une droite

6-1/ Représentation paramétrique d'une droite

6-2/ Équation cartésienne d'une droite

6-3/ Étude de l'ensemble des points

$\{M(x, y) / ax + by + c = 0\}$

VII- Droites parallèles dans le plan

IIIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

8-2/ Exercice 2

8-3/ Exercice 3

8-4/ Exercice 4

I- Base d'un plan – Repère d'un plan – Coordonnées d'un point du plan

1-1/ Base d'un plan – Repère d'un plan

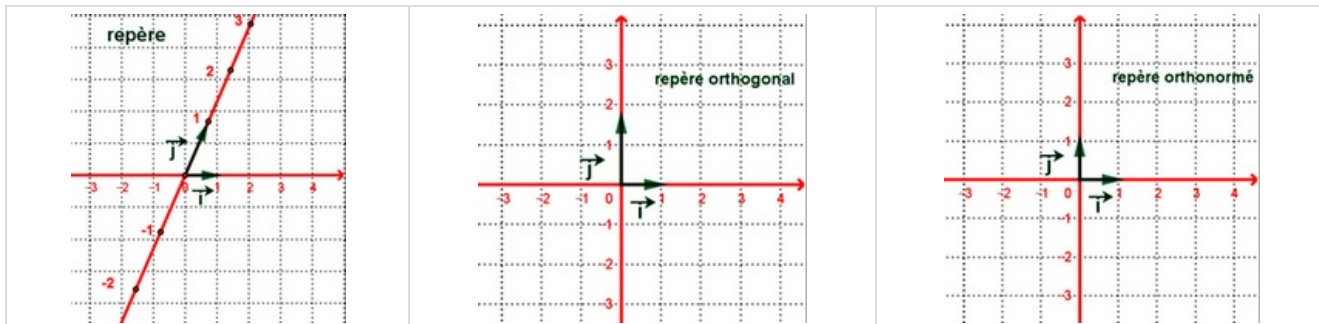
Définition

Soient O , I et J trois points non alignés du plan (P),

on pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$

- le triplet $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est appelé repère du plan (P)
- le point O est appelé l'origine du repère.
- Le couple $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est appelé une base du plan (P).
- la droite (OI) s'appelle l'axe des abscisses.
- la droite (OJ) s'appelle l'axe des ordonnées.
- Si $(OI) \perp (OJ)$, alors le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est un repère orthogonal
- Si $(OI) \perp (OJ)$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, alors le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est un repère orthonormé .

Exemples



1-2/ Coordonnées d'un point du plan

Le plan (P) est rapporté au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

- Pour tout point M du plan (P), il existe un et un seul couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$.

Le couple (x, y) est appelé couple des coordonnées du point M .

Le nombre x est appelé abscisse du point M .

Le nombre y est appelé ordonnée du point M .

Où on écrit $M(x, y)$ ou $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan (P) , il existe un seul couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$

Le couple (x, y) est appelé couple des coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

Le nombre x est appelé abscisse du vecteur $\vec{u}$.

Le nombre y est appelé ordonnée du vecteur $\vec{u}$.

Où on écrit $\vec{u}(x, y)$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1-3/ Coordonnées de la somme de deux vecteurs - Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Le plan (P) est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de (P) .

$A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ et $I(x_I, y_I)$ sont des points de (P) et $\alpha \in \mathbb{R}$

On a :

- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$. on note

$\vec{u} + \vec{v}(x + x', y + y')$.

- Le vecteur $\alpha \vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$. on note $\alpha \vec{u}(\alpha x, \alpha y)$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, on note

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

- $I(x_I, y_I)$ est le milieu du segment $[AB]$, on a $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Exemple

II- Déterminant de deux vecteurs

Le plan (P) est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de (P) .

Le nombre $xy' - x'y$ est appelé le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

III- Condition de colinéarité de deux vecteurs

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de (P) rapporté au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à $\det \left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 0$ ($xy' - yx' = 0$)

IV- Norme d'un vecteur - Distance entre deux points

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur de (P) .

$A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points de (P) .

On a :

La norme (ou la longueur) du vecteur $\vec{u}$ est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

La distance entre A et B est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

V- Vecteur directeur d'une droite

Définition

Soit (D) une droite passant par A et B

Tout vecteur non nul $\vec{u}$ et colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite (D) .

et on note : $D\left(A, \vec{u}\right)$ ou $D\left(B, \vec{u}\right)$ ou $D\left(A, \overrightarrow{AB}\right)$.

Exemple

VI- Représentation paramétrique et équation cartésienne d'une droite

6-1/ Représentation paramétrique d'une droite

Définition

Soit $D\left(A, \vec{u}\right)$ une droite du plan (P) qui est rapporté au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

tel que $A(x_A, y_A)$ et $\vec{u}(a, b)$.

L'écriture $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ est appelée représentation paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$.

Exemple

6-2/ Équation cartésienne d'une droite

Définition

Le plan (P) est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Toute droite $D(A(x_A, y_A); \vec{u})$ du plan (P) a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $c = x_A y_u - x_u y_A$ et $\vec{u}(-b, a)$ vecteur directeur de la droite (D) .

L'écriture $ax + by + c = 0$ est appelée équation cartésienne de la droite (D) avec $\vec{u}(-b, a)$ vecteur directeur de la droite (D) .

Exemple

6-3/ Étude de l'ensemble des points

$$\{M(x, y) / ax + by + c = 0 ; (a, b) \neq (0, 0)\}$$

Définition

Le plan (P) est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

l'ensemble des points $M(x, y)$ de (P) qui vérifient $ax + by + c = 0$ est la droite passant par le point $C(0, -\frac{c}{b})$ si $b \neq 0$ (ou $C'(-\frac{c}{a}, 0)$ si $a \neq 0$) et qui a $\vec{u}(-b, a)$ comme vecteur directeur.

Exemple

VII- Droites parallèles dans le plan

Propriété

Le plan (P) est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

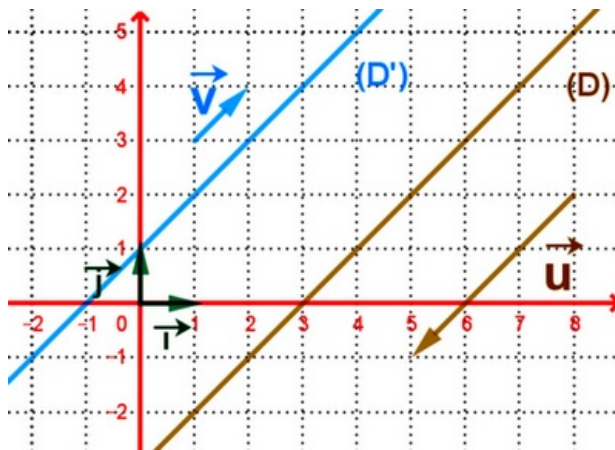
(D) et (D') sont deux droites de (P) tel que $(D) : ax + by + c = 0$ et $(D') : a'x + b'y + c' = 0$.

$(D) \parallel (D')$ équivaut à $ab' - a'b = 0$ ou $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

(D) et (D') sont deux droites de (P) tel que $(D) : y = mx + p$ et $(D') : y = m'x + p'$.

$(D) \parallel (D')$ équivaut à $m = m'$.

Exemple



IIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

On considère les points suivants : $A(1; 3)$, $B(-1; 2)$ et $C(-2; -1)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Calculer les distances suivantes : AB , AC et BC .
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes : $2\overrightarrow{AB}$ et $-3\overrightarrow{BC}$.
4. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes $2\overrightarrow{AB} + (-3)\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
5. Déterminer les coordonnées du point I le milieu du segment $[AB]$.

Soient $\overrightarrow{u}(3x + 1; 2)$ et $\overrightarrow{v}(4; y - 3)$ deux vecteurs.

6. Déterminer x et y pour que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.

8-2/ Exercice 2

On considère les points $A(3; 2)$ et $B(2; -1)$ et la droite (D) d'équation cartésienne $(D) : 3x - y + 6 = 0$.

1. Montrer que $(AB) \parallel (D)$.
2. Donner une équation cartésienne de la droite (D') passant par A et dirigées par le vecteur $\overrightarrow{u}(4; -1)$.
3. Montrer que (D) et (D') sont sécantes en $E(-1; 3)$.

Soit $F(a; 0)$ un point du plan.

4. Déterminer le nombre a pour que le quadrilatère $ABFE$ soit un parallélogramme.

8-3/ Exercice 3

Soient $\vec{u}(-1; 2)$, $\vec{v}(-4; 1)$ et $w(2m - 3; 2) / (m \in \mathbb{R})$ trois vecteurs du plan.

1. Étudier la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
 2. Déterminer la valeur du nombre m pour que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.
 3. Déterminer la valeur du nombre m pour que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.
- On considère les points suivants : $A(1; -8)$, $B(11; 7)$, $C(5; -1)$ et $D(7; 2)$.
4. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
 5. Étudier l'alignement des points E , F , et G dans les cas suivants :
 - $E(4; -2)$, $F(5; 1)$ et $G(11; 3)$.
 - $E(-2; 3)$, $F(0; -1)$ et $G(-1; 1)$.

8-4/ Exercice 4

1. Étudier la position relative de (D) et (D') dans les cas suivants :
 - 1 $(D) : 6x - 2y + 3 = 0$ et $(D') : 2x - \frac{1}{3}y - 1 = 0$
 - 2 $(D) : x + 2y - 3 = 0$ et $(D') : -x - 2y + 4 = 0$
 - 3 $(D) : 5x - 3y + 2 = 0$ et $(D') : 2x - 3y - 5 = 0$
 - 4 $(D) : -2x - y + 2 = 0$ et $(D') : \frac{1}{2}x - y - 7 = 0$