

Sommaire**III- Exercices I**

3-1/ Exercice 1-1

3-2/ Exercice 1-2

3-3/ Exercice 1-3

3-4/ Exercice 1-4

III- Exercices I

3-2/ Exercice 1-1

Pour chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 puis interpréter géométriquement les résultats obtenus :

$$\begin{aligned} 1 \quad & \begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x} \text{ si } x > 1 \end{cases} ; x_0 = 1 \\ 2 \quad & \begin{cases} f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{x}} \text{ si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ f(0) = 0 \end{cases} ; x_0 = 0 \\ 3 \quad & \begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} \text{ si } x \geq 2 \\ f(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Arc tan} \frac{1}{\sqrt{2-x}} \text{ si } x < 2 \end{cases} ; x_0 = 2 \end{aligned}$$

3-4/ Exercice 1-2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par: $f(x) = x - \frac{1}{\operatorname{Arc tan}(x)}$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction f
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0; +\infty[$ et que $1 < \alpha < \sqrt{3}$
3. a) Montrer que f admet un réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$
b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$
c) Montrer que : $(f^{-1})'(0) = \frac{1+\alpha^2}{1+2\alpha^2}$

3-6/ Exercice 1-3

On considère la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par : $g(x) = x - 3 + \sqrt{x^2 - x}$

1. Étudier la dérivabilité de la fonction g à droite en 1 puis interpréter le résultat géométriquement.
2. Étudier les variations de la fonction g .
3. Montrer que g admet une fonction réciproque dont on déterminera le domaine de définition,
4. Montrer que g^{-1} est dérivable en $(\sqrt{2} - 1)$ puis calculer $(g^{-1})'(\sqrt{2} - 1)$.

3-5/ Exercice 1-4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\infty; 0[$ par:

$$f(x) = \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$$

1. Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{0^-} f(x)$
2. a) Montrer que f est continue sur I
b) Montrer que f est monotone sur I
3. a) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J .
4. a) Vérifier que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$ puis calculer $f(-1)$ et $(f^{-1})'\left(-\frac{\pi}{8}\right)$
b) Montrer que
 $\forall x \in I : f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Arc} \tan x$ et calculer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J