

Sommaire

IIX- Exercices III

8-1/ Exercice 3-1

8-2/ Exercice 3-2

8-3/ Exercice 3-3

8-4/ Exercice 3-4

8-5/ Exercice 3-5

IIX- Exercices III

8-1/ Exercice 3-1

1. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\operatorname{Arc} \tan \left(\frac{1}{1+x+x^2} \right) = \operatorname{Arc} \tan \left(\frac{1}{x} \right) - \operatorname{Arc} \tan \left(\frac{1}{1+x} \right)$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \operatorname{Arc} \tan \left(\frac{1}{1+n+n^2} \right)$ et $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$

2. Calculer $\lim u_n$.
3. Exprimer S_n en fonction de n . Préciser $\lim S_n$.

8-2/ Exercice 3-2

Soit f la fonction définie sur $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ par : $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$

1. Déterminer $f(I)$.

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = \frac{1}{5}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
4. En déduire que (u_n) est convergente.
5. Calculer la limite de la suite (u_n) .

8-3/ Exercice 3-3

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer par l'absurde que (u_n) n'est pas majorée.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

8-4/ Exercice 3-4

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \quad (\alpha > \sqrt[3]{a} \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2u_n + \frac{a}{u_n^2} \right) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - \sqrt[3]{a} = \frac{2u_n + \sqrt[3]{a}}{3u_n^2} (u_n - \sqrt[3]{a})^2$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n > \sqrt[3]{a}$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - \sqrt[3]{a} \leq \frac{2}{3} (u_n - \sqrt[3]{a})$
6. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - \sqrt[3]{a} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - \sqrt[3]{a})$
7. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

8-6/ Exercice 3-5

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4} |u_n - u_{n-1}|$.

On considère les suites (α_n) et (β_n) définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \alpha_n = u_{2n} \text{ et } \beta_n = u_{2n+1}$$

4. Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \beta_n = 1 + \frac{1}{1+\alpha_n}$.
5. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \alpha_n \leq \beta_n$.
6. Montrer que la suite (α_n) est croissante et la suite (β_n) est décroissante.
7. Montrer que les suites (α_n) et (β_n) convergent et vers la même limite.
8. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4} |u_n - \sqrt{2}|$
9. En déduire la limite de la suite (u_n) .

10. Déterminer un entier naturel N à partir duquel $(\forall n \in \mathbb{N}) \left| u_n - \sqrt{2} \right| < 10^{-2}$.