AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 2-3-2 : Suites numériques - Partie 3 (Exercices)

**Professeur : Mr CHEDDADI Haitam**

Sommaire


IIX- Exercices III

8-1/ Exercice 3-1

8-2/ Exercice 3-2

8-3/ Exercice 3-3

8-4/ Exercice 3-4

8-5/ Exercice 3-5


---

# IIX- Exercices III

## 8-1/ Exercice 3-1

1. Montrer que pour tout $x \in ]0;+\infty[$ :

$$Arc\tan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) - Arc\tan\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $u_n = Arc\tan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

2. Calculer $limu_n$.
3. Exprimer $S_n$ en fonction de $n$. Préciser $limS_n$.

## 8-2/ Exercice 3-2

Soit $f$ la fonction définie sur $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ par : $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$

1. Déterminer $f(I)$.

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par $u_0 = \frac{1}{5}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$
3. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)$.
4. En déduire que $(u_n)$ est convergente.
5. Calculer la limite de la suite $(u_n)$.

## 8-3/ Exercice 3-3

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + {u_n}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

2. Montrer par l'absurde que $(u_n)$ n'est pas majorée.
3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

## 8-4/ Exercice 3-4

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \ \ (\alpha > \sqrt[3]{a} \ et \ \alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{a}{{u_n}^2}\right) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_{n+1} - \sqrt[3]{a} = \frac{2u_n + \sqrt[3]{a}}{3{u_n}^2}\left(u_n - \sqrt[3]{a}\right)^2$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n > \sqrt[3]{a}$.
4. En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.
5. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - \sqrt[3]{a} \leq \frac{2}{3}\left(u_n - \sqrt[3]{a}\right)$
6. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - \sqrt[3]{a} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(u_0 - \sqrt[3]{a}\right)$
7. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

## 8-6/ Exercice 3-5

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n} \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Calculer $u_1$, $u_2$ et $u_3$.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4}|u_n - u_{n-1}|$.

On considère les suites $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \alpha_n = u_{2n} \ et \ \beta_n = u_{2n+1}$$

4. Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ \beta_n = 1 + \frac{1}{1+\alpha_n}$.
5. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ \alpha_n \leq \beta_n$.
6. Montrer que la suite $(\alpha_n)$ est croissante et la suite $(\beta_n)$ est décroissante.
7. Monter que les suites $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ convergent et vers la même limite.
8. Monter que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{4}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$
9. En déduire la limite de la suite $(u_n)$.
10. Déterminer un entier naturel $N$ à partir duquel $(\forall n \in \mathbb{N})\ \left|u_n - \sqrt{2}\right| < 10^{-2}$.