

Sommaire

V- Exercices II

5-1/ Exercice 2-1

5-2/ Exercice 2-2

5-3/ Exercice 2-3

5-4/ Exercice 2-4

V- Exercices II

5-1/ Exercice 2-1

Calculer les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 5n^2 - 6n + 7)$$

$$2 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 5n + 2}{4 - n^3}$$

$$3 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - n + 4} - n \right)$$

$$4 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Arc} \tan \sqrt[3]{n + 6}$$

$$5 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{n + 1} - \sqrt[3]{n - 1} \right)$$

$$6 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{1}{3}} \right)$$

$$7 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{3}{5}} + n^{\frac{6}{7}}}{n^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{4}{9}}}$$

5-2/ Exercice 2-2

Calculer la limite de chacune des suites suivantes :

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n$$
$$d_n = \frac{2^n - 1}{7^n + 1}$$
$$e_n = \frac{2^n - 5^n}{4^n + 9^n}$$

$$u_n = \left(\frac{7}{3}\right)^n - 2017^n$$
$$v_n = \frac{4^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$$
$$w_n = \sqrt[5]{2^n} - \sqrt[3]{2^n}$$
$$x_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{3^{2n-1}}$$

5-3/ Exercice 2-3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ et $u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1+u_n^3}{8}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$
2. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{7}{8}u_n^3 - \frac{1}{8}$

4. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
5. Exprimer u_n en fonction de n , puis donner $\lim(u_n)$.

5-4/ Exercice 2-4

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{8(u_n-1)}{u_n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) 2 < u_n < 4$
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n) puis en déduire qu'elle est convergente.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$
4. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$. Puis déterminer $\lim(u_n)$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{u_n-4}{u_n-2}$.

5. Établir que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
6. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
7. Retrouver la valeur de la limite de (u_n) .

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^* : S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

8. Exprimer S_n en fonction de n , puis conclure $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.