

Sommaire**IX- Problème de synthèse****9-1/ Partie 1****9-2/ Partie 2****9-3/ Partie 3****IX- Problème de synthèse****9-1/ Partie 1**

1. Montrer que :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[; \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

2. a- Montrer que pour tout $a \in [0; +\infty[$:

$$\text{Arc tan}(\sqrt{a} + \sqrt{a+1}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{Arc tan}(\sqrt{a})$$

2. b- En déduire que :

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$$

9-2/ Partie 2

Calculer les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \sqrt[3]{x^{-2}}\right) \left(\text{Arc tan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arc tan}\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right) - \frac{\pi}{4}}{x}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{2-x} - \sqrt[6]{2-x}}{\sqrt[3]{2-x} - \sqrt{2-x}}$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - (x + 1)\right) \text{Arc tan}\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1\right)$$

9-3/ Partie 3

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; \frac{\pi}{2} [$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{1-x} + x - 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \text{Arc tan}(\sqrt[3]{x} + \tan x) & \text{si } x \in [0; \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue en 0.
2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [0; \frac{\pi}{2}[$.

3. Montrer que g est strictement croissante sur I .
4. Montrer que g est une bijection de I sur I .

On note g^{-1} la fonction réciproque de g .

5. Résoudre dans I l'équation $g^{-1}(x) = x$.
6. Montrer que $(\forall x \in I) \quad g^{-1}(x) \leq x$.